模糊理论与工程系列丛书

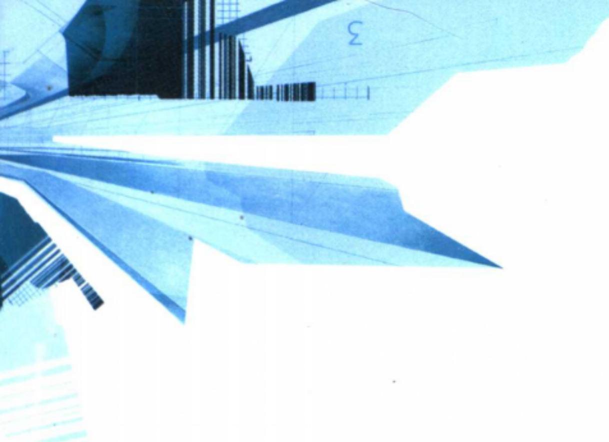
模糊代数与粗糙代数

张振良 张金玲 肖旗梅 编著



武汉大学出版社
WUHAN UNIVE





■ 责任编辑：李汉保

■ 责任校对：王　建

■ 版式设计：支　笛

■ 封面设计：涂　驰

● 模糊理论与工程系列丛书 ●

ISBN 978-7-307-05522-3

9 787307 055223 >

定价：17.00元



论与工程系列丛书

模糊代数与粗糙代数

张振良 张金玲 肖旗梅 编著



武汉大学出版社
WUHAN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

模糊代数与粗糙代数/张振良,张金玲,肖旗梅编著.—武汉:武汉大学出版社,2007.8

模糊理论与工程系列丛书

ISBN 978-7-307-05522-3

Ⅰ.模… Ⅱ.①张… ②张… ③肖… Ⅲ.模糊代数 Ⅳ.O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 052115 号

责任编辑:李汉保　　责任校对:王　建　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北省孝感日报社印刷厂

开本:720×1000　1/16　印张:11.5　字数:184 千字

版次:2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-05522-3/O・359　定价:17.00 元

张振良，男，1945年4月生，云南省大理市人，白族。云南省数学学会理事，昆明理工大学理学院院长，应用数学、系统理论硕士生导师，教授。1968年毕业于云南大学数学系，1983～1984年于北京师范大学数学系进修，2004年4～5月赴日本大阪产业大学访问。多年来从事模糊数学、幂集代数和粗糙集代数的研究，发表论文50多篇，国内外核心刊物30多篇。获云南省自然科学三等奖，云南省教育厅科研成果三等奖。曾赴新加坡、泰国参加国际会议，赴中国香港、日本访问，开展学术交流与合作。30多年来，一直从事本科生和研究生数学教学。曾编著和编写专著和教材5本，已出版的教材中作为教学改革的主要材料，曾获国家级教学成果二等奖

张金玲，女，1974年4月生，湖北省襄樊市人，汉族。襄樊学院数学讲师。1996年本科毕业于湖北大学数学系，之后一直在襄樊学院数学系任教，2000～2003年于昆明理工大学理学院攻读系统理论方向理学硕士，并以优秀的毕业论文顺利毕业。毕业后仍回原校工作。主持了一项湖北省教育厅重点基金项目《模糊代数与粗糙代数研究》，公开发表论文5篇。多年来，曾两次荣获校级青年教学竞赛二等奖，多次荣获其他优秀奖励。

肖旗梅，女，1976年8月生，湖南双峰人，汉族。2004年3月昆明理工大学理学院系统理论专业硕士研究生毕业。毕业至今在长沙理工大学数学与计算机科学学院任教，期间主要担任学校的公共课程高等数学与概率统计的教学和学生毕业论文的指导工作，参与概率统计课程教材的编写工作和课程建设工作。近几年发表论文多篇，一篇被SCI检索

内容简介

本书介绍了模糊集、粗糙集、模糊代数和粗糙代数方面的基本理论。主要内容有：第一章介绍模糊集的基本理论；第二章介绍模糊群与模糊环，包括模糊群与模糊环、模糊正规子群、模糊理想、模糊素理想与模糊极大理想等概念及性质；第三章介绍幂群与模糊幂群，包括幂群、幂环、模糊幂群、模糊幂环及其分类、幂群的同态与同构等；第四章介绍粗糙集与模糊粗糙集的基本理论；第五章介绍粗糙群与模糊粗糙群、半群中的粗理想与模糊粗理想、粗素理想与模糊粗素理想等概念及性质；第六章介绍粗糙环、粗糙理想、模糊粗糙环与模糊粗糙理想、环中的粗素理想与模糊粗素理想、环中的粗极大理想与模糊粗极大理想等。

本书可以作为数学、计算机科学、信息科学、管理科学等专业的研究生及高年级本科生的选修课教材，也可以作为研究模糊集理论、粗糙集理论、模糊代数和粗糙代数的科技人员的参考书。

前　言

1965 年,美国控制论专家 L. A. Zadeh 教授创立了模糊集合论。模糊集合论作为经典集合论的推广,它概括了更加多样化的数学概念的框架,建立了能处理模糊现象的确切的数学理论,以拓广数学基础,产生了模糊测度、模糊拓扑、模糊代数、模糊概率、模糊规划等新的研究方向,使经典数学的若干方向在更广阔、更深刻的意义下向前挺进,从而深化了人类对数学中若干基本概念的认识,拓广了数学的应用范围。

1982 年,波兰数学家 Z. Pawlak 首先提出了一种处理不确定性现象的数学理论——粗糙集理论。近年来该理论在机器学习与知识发现、数据挖掘、决策支持与分析、专家系统与智能控制等方向有广泛的应用。目前,粗糙集理论已成为信息科学最为活跃的研究领域之一。随着粗糙集理论研究的不断深入,粗糙集的数学结构,包括代数结构、拓扑结构、序结构等的研究也引起了数学工作者的重视,在许多方面已经取得了显著的研究成果,形成了一些新的研究方向。

本书的目的就是介绍模糊集、粗糙集和模糊粗糙集的基本理论。介绍国内外在模糊代数和粗糙代数方面的研究成果,主要介绍了我们在幂集代数与模糊幂集代数,以及粗糙集的代数结构方面的研究成果,期望为从事模糊集、粗糙集、模糊代数和粗糙集理论研究的学者及研究生进入这一领域提供捷径。

本书在写作过程中,参考了罗承忠教授的《模糊集引论》,张文修教授的《模糊数学引论》及《粗糙集理论与方法》,马骥良与于纯海教授的《模糊代数选论》等著作。在介绍幂群与模糊幂群等最新研究成果时,参考了李洪兴教授,罗承忠教授的研究成果。在写作第三章、第四章、第五章、第六章时引用了我的学生扬培亮、刘文军、张金玲、郭庆、张晓莉、肖旗梅、赵晓艳、高井贵、郭海刚、孔平、李扉、殷允强、张虹、黄春娥、黄晓昆、李红杰、曾亦洁等的部分研究成果。本书写作过程中始终得到了北京师范大学李洪兴教授,哈尔滨工业大学吴从炘教授,武汉大学胡宝清教授等的大力支持,借此机会,表示衷心感谢。

鉴于我们从事该领域研究的时间不长，加之我们自身的学识和水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

作　者

2006年10月

序

1965 年,美国计算机与控制论专家 L. A. Zadeh 教授提出了 Fuzzy 集概念,创造了研究模糊性或不确定性问题的理论方法,迄今已成为一个较为完善的数学分支。

近四十年来,模糊理论与技术得到了迅猛发展,国内外学者在这个领域做了大量卓有成效的工作,其中许多探索是具有突破性的。模糊理论与技术一个突出的优点就是能较好地描述与仿效人的思维方式,总结和反映人的体会与经验,对复杂事物和系统可进行模糊度量、模糊识别、模糊推理、模糊控制与模糊决策。尤其是模糊理论与人工智能在神经网络和专家系统等方面相互结合的研究已涉及到计算机、多媒体、自动控制以及信息采集与处理等一系列高新技术的开发与利用,有力地推动了应用科学、决策科学、管理科学与社会科学的进步,这种学术理论体系不断完善的新成果正在迅速地转变成生产力促进社会物质文明水平的不断提高。

为了系统地归纳总结模糊理论与技术的学术成就,系统地向广大读者介绍、普及模糊数学的基础理论与基本知识,进一步推动该学科的发展,使之有利于为社会经济建设服务,我们经过多年的酝酿、策划与探索,决定组织出版“模糊理论与工程系列丛书”。这套系列丛书中的大部分既可作为理工类本科生、硕士生的教材,也可作为高等院校教师、相关科技工作者与模糊理论爱好者的参考读本。

“模糊理论与工程系列丛书”能够顺利出版主要得益于两方面的大力支持:

其一,得益于我国模糊数学界广大专家、学者的支持。2002 年 11 月全国第 11 届模糊数学年会在厦门集美大学召开,我们为组织该丛书的出版广泛征求了意见,得到了广大与会者的大力支持,不少学者表示愿承担该系列丛书的撰写工作。尤其是王国俊教授、吴从炘教授、应明生教授、张文修教授、罗懋康教授、韩立岩教授等,在表示支持组织出版该丛书的同时,对该丛书的理论构架、选题定位以及一些具体操作细节上提出了许多宝贵的指导性意见。特别值得提及的是,厦门会议以后,得到了刘应明院士以及广大专家、学者的大力支持,组成了以刘应明院士为名誉主编的本系列丛书编委会。组织这个编委会的目的一是对该丛书的指导思想、选题思路以及今后的趋势将经常听取编委们的意见,二是对本

系列丛书中拟将出版的每一本书都要由相关编委审核把关，尔后付梓，以确保丛书质量。

其二，得益于武汉大学出版社的大力支持，武汉大学出版社是被中共中央宣传部，国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版社之一。该社以出书严谨著称，建社二十多年来，所出版的一大批专著、教材曾荣获“中国图书奖”、“国家图书奖”、“五个一工程奖”等国家级奖励。武汉大学出版社社长、总编与相关编辑对本系列丛书的出版给予了大力支持，多年来他们做了许多深入细致的工作，使这套系列丛书的第一批作品得以顺利出版。

在此我代表本系列丛书的全体作者，对各位专家、学者，武汉大学出版社的领导与编辑表示由衷的感谢！真诚地希望广大专家、学者对本系列丛书提出宝贵的意见，使之日臻完善；热诚地欢迎广大专家、学者积极参与本丛书的编撰工作，使之日渐丰富。组织出版这套系列丛书本身就是一项系统工程。需要各位专家、学者以及方方面面的鼎力相助。倘若这套系列丛书能对广大读者有所裨益，能在浩瀚的书海中泛起一片闪光的涟漪，作为本系列丛书的主编，我就喜出望外了。谨此为序。

欧阳绵

2004 年 4 月于武汉大学

目　录

第一章 模糊集的基本理论

§1.1 模糊集及其运算

设 X 是论域,A 是 X 的子集,A 可以用特征函数表示,即映射 $A: X \to \{0,1\}$,$\forall x \in X$

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases} \tag{1.1}$$

X 的子集和子集的特征函数一一对应.

对于论域 X 上的一个模糊概念,确定了 X 上的一个模糊子集 A,对于任意的 $x \in X$,x 和 A 之间不是绝对属于或绝对不属于的关系. 为了表示 x 属于 A 的程度,我们用[0,1] 中一个数值来表示,所以论域 X 上的一个模糊子集可以用 X 到 [0,1] 的一个映射来描述.

定义 1.1.1 设 X 是论域,映射 $A: X \to [0,1]$ 称为 X 的一个模糊子集,简称为 F 集,映射 A 称为 F 集 A 的隶属函数,$A(x)$ 称为 x 关于 A 的隶属度.

论域 X 上的所有 F 集记为 $F(X)$,显然 $P(X) \subseteq F(X)$.(其中,$P(X)$ 是论域 X 上的所有经典集).

论域 X 上的 F 集有下列表示法:

(1)$A = \{(x, A(x)) \mid x \in X\}$;

(2) 若 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,记 $A \triangleq (A(x_1), A(x_2), \cdots, A(x_n))$;

(3) 若 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$,记 $A \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A(x_i)}{x_i}$;

(4) 若 X 是不可数集,记 $A \triangleq \int \frac{A(x)}{x} dx$.

例 1.1.1 设 $X = [0,100]$ 表示年龄论域,Zadeh 给出了年轻人"Y" 和老年人"O" 两个 F 集的隶属函数

$$Y(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant x \leqslant 25 \\ \left[1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25 < x \leqslant 100 \end{cases}$$

$$O(x)=\begin{cases}0, & 0 \leqslant x \leqslant 50 \\ \left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50 < x \leqslant 100\end{cases}$$

定义 1.1.2 设 $A,B \in F(X)$.

(1) 若 $\forall x \in X, A(x) \leqslant B(x)$,则称 A 包含于 B,或 B 包含 A,记为 $A \subseteq B$,或 $B \supseteq A$.

(2) 若 $\forall x \in X, A(x) = B(x)$,则称 A 和 B 相等,记为 $A = B$.

显然,$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

$\forall x \in X, \varnothing(x) = 0, X(x) = 1$.

由此,$(F(X), \subseteq)$ 是具有最小元 $\varnothing$ 和最大元 X 的偏序集.

定义 1.1.3 设 $A,B \in F(X)$,定义并、交、余运算如下:

(1) $$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x) \tag{1.2}$$

(2) $$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x) \tag{1.3}$$

(3) $$A'(x) = 1 - A(x) \tag{1.4}$$

分别称 $A \cup B, A \cap B$ 为 A 和 B 的并集、交集;称 A' 为 A 的余集,如图 1.1 ~ 图 1.3 所示.

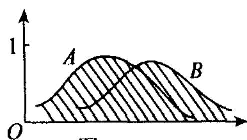


图1.1

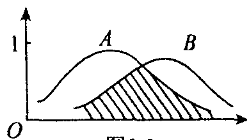


图1.2

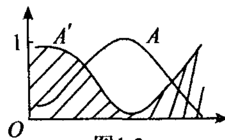


图1.3

设 T 是指标集,$A_t \in F(X)(t \in T)$,定义无限并、无限交如下:

$$(\bigcup_{t \in T} A_t)(x) = \bigvee_{t \in T} A_t(x) \tag{1.5}$$

$$(\bigcap_{t \in T} A_t)(x) = \bigwedge_{t \in T} A_t(x) \tag{1.6}$$

定理 1.1.1 设 $A,B,C \in F(X)$,则并、交、余满足下列性质:

(1) 幂等律 $A \cup A = A, A \cap A = A$;

(2) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

(3) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(4) 吸收律 $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$;

(5) 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(6) 同一律 $A \cup \emptyset = A, A \cap X = A$;

(7) 两极律 $A \cup X = X, A \cap \emptyset = \emptyset$;

(8) 对合律 $(A')' = A$;

(9) 对偶律 $(A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'$.

证明略.

F 集不满足补余律,即 $A \cup A' \neq X, A \cap A' \neq \emptyset$.

例 1.1.2　设 $X = [0,1], A(x) = x$,则 $A'(x) = 1 - x$,且

$$(A \cup A')(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ x, & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$(A \cap A')(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 1 - x, & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

所以,$A \cup A' \neq X, A \cap A' \neq \emptyset$.

设 $A \in F(X)$,即 $A: X \to [0,1]$,所以 $A \in [0,1]^X$. 又 $\forall A, B \in F(X), x \in X$,

$$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$$
$$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$$
$$A'(x) = 1 - A(x)$$

即代数系统 $(F(X), \cap, \cup, ')$ 中的运算分别是由代数系统 $([0,1]^X, \wedge, \vee, ')$ 中的相应运算定义的,易证 $F(X) \cong [0,1]^X$,所以 $(F(X), \cap, \cup, ')$ 是一个具有伪补的完全分配格,即模糊格.

§1.2　模糊集的模运算

定义 1.2.1　映射 $\triangle: [0,1]^2 \to [0,1]$ 称为三角模,如果 $\triangle$ 满足:$\forall a, b, c, d \in [0,1]$

(1) 交换律:$\triangle(a,b) = \triangle(b,a)$;

(2) 结合律:$\triangle(\triangle(a,b),c) = \triangle(a,\triangle(b,c))$;

(3) 单调性:$a \leqslant c, b \leqslant d$,则 $\triangle(a,b) \leqslant \triangle(c,d)$;

(4) $\triangle(0,0) = 0, \triangle(1,1) = 1$.

若三角模 $\triangle$ 还满足:$\triangle(a,1) = a$,则称 $\triangle$ 为 T 模,记为 T;

若三角模 $\triangle$ 还满足:$\triangle(0,a) = a$,则称 $\triangle$ 为 S 模,记为 S.

例 1.2.1　(1) 下列五种运算是 T 模

$$T_0'(a,b)=\begin{cases}a, & b=1\\ b, & a=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$T_0(a,b)=a\wedge b$$

$$T_1(a,b)=ab$$

$$T_2(a,b)=\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$$

$$T_\infty(a,b)=0\vee(a+b-1).$$

(2) 下列五种运算是 S 模

$$S_0'(a,b)=\begin{cases}b, & a=0\\ a, & b=0\\ 1, & \text{其他}\end{cases}$$

$$S_0(a,b)=a\vee b$$

$$S_1(a,b)=a+b-ab$$

$$S_2(a,b)=\frac{a+b}{1+ab}$$

$$S_\infty(a,b)=1\wedge(a+b).$$

例 1.2.2 $\forall\lambda\geqslant 0$,定义

$$T^{(\lambda)}(a,b)=\frac{ab}{\lambda+(1-\lambda)(a+b-ab)}$$

$$S^{(\lambda)}(a,b)=\frac{a+b+(\lambda-2)ab}{1+(\lambda-1)ab}$$

$T^{(\lambda)}$ 和 $S^{(\lambda)}$ 分别是 T 模和 S 模.

特别地,当 $\lambda=1$ 时,$T^{(1)}=T_1,S^{(1)}=S_1$,

当 $\lambda=2$ 时,$T^{(2)}=T_2,S^{(2)}=S_2$.

定理 1.2.1 三角模之间满足下列关系

$$T_0'\leqslant T_\infty\leqslant T_2\leqslant T_1\leqslant T_0\leqslant S_0\leqslant S_1\leqslant S_2\leqslant S_\infty\leqslant S_0'.$$

证明略.

记

$$\mathscr{D}(T)=\{T\mid T\text{是}T\text{模}\},\mathscr{D}(S)=\{S\mid S\text{是}S\text{模}\}.$$

定理 1.2.2 三角模具有如下性质:

(1) $\forall T\in\mathscr{D}(T)$,有 $T_0'\leqslant T\leqslant T_0$;

(2) $\forall S\in\mathscr{D}(S)$,有 $S_0\leqslant S\leqslant S_0'$;

(3) $\forall T\in\mathscr{D}(T)$,$T$ 满足幂等律 $\Leftrightarrow T=T_0$;

(4) $\forall S\in\mathscr{D}(S)$,$S$ 满足幂等律 $\Leftrightarrow S=S_0$.

证明 (1) 因为 $\forall T \in \mathscr{D}(T)$, $T(a,1)=a$,而

$$T_0'(a,b)=\begin{cases}a, & b=1\\ b, & a=1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则 $T_0' \leqslant T$. 由于 T 的单调性

$$T(a,b) \leqslant T(a,1)=a, T(a,b) \leqslant T(1,b)=b,$$

所以 $T(a,b) \leqslant a \wedge b$,即 $T \leqslant T_0$ 从而 $T_0' \leqslant T \leqslant T_0$.

同理证(2).

(3) 充分性显然. 设 T 满足幂等律,即 $T(a,a)=a$,则

$$T_0(a,b)=a \wedge b=T(a \wedge b, a \wedge b) \leqslant T(a,b) \leqslant T_0(a,b,),$$

从而 $T=T_0$.

同理证(4).

定义 1.2.2 $\forall a \in [0,1]$, $a'=1-a$ 是 a 的伪补,若 $T \in \mathscr{D}(T)$, $S \in \mathscr{D}(S)$ 满足

(1) $$(T(a,b))'=S(a',b') \tag{1.7}$$

(2) $$(S(a,b))'=T(a',b') \tag{1.8}$$

则称 T 和 S 是对偶模.

不难验证,T_0 与 S_0,T_1 与 S_1,T_2 与 S_2,T_∞ 与 S_∞ 是四对对偶模.

定义 1.2.3 设 T 和 S 是一对对偶模,$\forall A,B \in F(X)$,称

(1) $$(A \cup B)(x)=S(A(x),B(x)) \tag{1.9}$$

是 A 和 B 的模并;

(2) $$(A \cap B)(x)=T(A(x),B(x)) \tag{1.10}$$

是 A 和 B 的模交;

(3) $$A'(x)=1-A(x) \tag{1.11}$$

是 A 的补.

定理 1.2.3 F 集的模运算满足下列性质:

(1) 交换律 $A \cup B=B \cup A$, $A \cap B=B \cap A$;

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$;

(3) 同一律 $A \cap X=A$, $A \cup \varnothing=A$;

(4) 两极律 $A \cup X=X$, $A \cap \varnothing=\varnothing$;

(5) 对合律 $(A')'=A$;

(6) 对偶律 $(A \cup B)'=A' \cap B'$, $(A \cap B)'=A' \cup B'$;

(7) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$, $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$;

(8) $\varnothing'=X$, $X'=\varnothing$.

证明略.

由此,三角模不一定满足幂等律、吸收律、分配律和补余律,所以代数系统 $(F(X), \Cap, \Cup, ')$ 不是格.

例 1.2.3 由例 1.2.1 中的四对模运算可以定义下列常用的四对 F 运算.

(1) 由 $T_0(a,b) = a \wedge b, S_0(a,b) = a \vee b$ 定义

$$(A \cap B)(x) = T_0(A(x), B(x)) = A(x) \wedge B(x)$$

$$(A \cup B)(x) = S_0(A(x), B(x)) = A(x) \vee B(x)$$

(2) 由 $T_1(a,b) = ab, S_1(a,b) = a + b - ab$ 定义

$$(A \hat{\cdot} B)(x) = T_1(A(x), B(x)) = A(x)B(x)$$

$$(A \hat{+} B)(x) = S_1(A(x), B(x)) = A(x) + B(x) - A(x)B(x)$$

(3) 由 $T_2(a,b) = \dfrac{ab}{1 + (1-a)(1-b)}, S_2(a,b) = \dfrac{a+b}{1+ab}$ 定义

$$(A \dot{\varepsilon} B)(x) = T_2(A(x), B(x)) = \frac{A(x)B(x)}{1 + (1 - A(x))(1 - B(x))}$$

$$(A \overset{+}{\varepsilon} B)(x) = S_2(A(x), B(x)) = \frac{A(x) + B(x)}{1 + A(x)B(x)}$$

(4) 由 $T_\infty(a,b) = 0 \vee (a + b - 1), S_\infty(a,b) = 1 \wedge (a + b)$ 定义

$$(A \odot B)(x) = T_\infty(A(x), B(x)) = 0 \vee (A(x) + B(x) - 1)$$

$$(A \oplus B)(x) = S_\infty(A(x), B(x)) = 1 \wedge (A(x) + B(x)).$$

F 集合的以上模运算是经典集合的并、交运算的推广,若 F 集合退化为经典集合,则 S 模运算就是并运算,T 模运算就是交运算,伪补运算就是补运算.

§1.3 模糊集的分解定理

定义 1.3.1 设 $A \in F(X), \forall \lambda \in [0,1]$

(1) $$A_\lambda = \{x \in X \mid A(x) \geqslant \lambda\} \tag{1.12}$$

称为 A 的 λ 截集.

(2) $$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \{x \in X \mid A(x) > \lambda\} \tag{1.13}$$

称为 A 的 λ 强截集. 特别地

(1) $$A_1 = \{x \in X \mid A(x) = 1\} \tag{1.14}$$

称为 A 的核,记为 kerA.

(2) $$A_{\underset{\cdot}{0}} = \{x \in X \mid A(x) > 0\} \tag{1.15}$$

称为 A 的支集,记为 Supp$A$. 显然,

(1) $$A_\lambda \subseteq X, A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq X, A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq A_\lambda,$$

(2) 当 $\lambda<\mu$ 时，$A_\mu\subseteq A_\lambda$，$A_{\underset{\cdot}{\mu}}\subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，$A_\mu\subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

定理 1.3.1　设 $A,B\in F(X)$，$\lambda\in[0,1]$，则

(1) $$(A\cup B)_\lambda=A_\lambda\cup B_\lambda \tag{1.16}$$

(2) $$(A\cap B)_\lambda=A_\lambda\cap B_\lambda \tag{1.17}$$

(3) $$(A\cup B)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\cup B_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{1.18}$$

(4) $$(A\cap B)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\cap B_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{1.19}$$

证明　只证(1)，其他证明类似.

$\forall x\in(A\cup B)_\lambda\Leftrightarrow(A\cup B)(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow A(x)\vee B(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow A(x)\geqslant\lambda$ 或 $B(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow x\in A_\lambda$ 或 $x\in B_\lambda\Leftrightarrow x\in A_\lambda\cup B_\lambda$，所以 $(A\cup B)_\lambda=A_\lambda\cup B_\lambda$.

定理 1.3.2　设 $\{A_t\mid t\in T\}\subseteq F(X)$，$\lambda\in[0,1]$，则

(1) $$\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)_\lambda\supseteq\bigcup_{t\in T}(A_t)_\lambda \tag{1.20}$$

(2) $$\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)_\lambda=\bigcap_{t\in T}(A_t)_\lambda \tag{1.21}$$

(3) $$\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{1.22}$$

(4) $$\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq\bigcap_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{1.23}$$

证明　只证(1)、(2)，其他证明类似.

(1) $\forall x\in\bigcup_{t\in T}(A_t)_\lambda\Rightarrow\exists t\in T,x\in(A_t)_\lambda\Rightarrow\exists t\in T,A_t(x)\geqslant\lambda\Rightarrow\bigvee_{t\in T}A_t(x)\geqslant\lambda\Rightarrow\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)(x)\geqslant\lambda\Rightarrow x\in\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)_\lambda$. 所以 $\bigcup_{t\in T}(A_t)_\lambda\subseteq\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)_\lambda$.

(2) $x\in\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)_\lambda\Leftrightarrow\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow\bigwedge_{t\in T}A_t(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow\forall t\in T,A_t(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow\forall t\in T,x\in(A_t)_\lambda\Leftrightarrow x\in\bigcap_{t\in T}(A_t)_\lambda$. 所以 $\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)_\lambda=\bigcap_{t\in T}(A_t)_\lambda$.

一般情况下，定理 1.3.2 中的(1)和(4)等号不成立.

例如，设 $X\neq\varnothing$，$A_n\in F(X)$，$\forall x\in X$，若

$$A_n(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\quad(n=1,2,\cdots)$$

则 $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)_{\underset{\cdot}{\frac{1}{2}}}\neq\varnothing$，而 $\forall n\in N$，$(A_n)_{\underset{\cdot}{\frac{1}{2}}}=\varnothing$，故 $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n)_{\underset{\cdot}{\frac{1}{2}}}=\varnothing$，所以 $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)_{\underset{\cdot}{\frac{1}{2}}}\neq\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n)_{\underset{\cdot}{\frac{1}{2}}}$.

定理 1.3.3　设 $A\in F(X)$，$\{\lambda_t\mid t\in T\}\subseteq[0,1]$，记 $\lambda=\bigvee_{t\in T}\lambda_t$，$\mu=\bigwedge_{t\in T}\lambda_t$，则

(1) $$A_\lambda = \bigcap_{t\in T} A_{\underset{\cdot}{\lambda_t}} \tag{1.24}$$

(2) $$A_\mu = \bigcup_{t\in T} A_{\lambda_t} \tag{1.25}$$

证明 只证(1),(2)的证明类似.

$\forall t \in T, \lambda_t \leqslant \lambda \Rightarrow \forall t \in T, A_\lambda \subseteq A_{\lambda_t} \Rightarrow A_\lambda \subseteq \bigcap_{t\in T} A_{\lambda_t}$.

反之,$\forall x \in \bigcap_{t\in T} A_{\lambda_t} \Rightarrow \forall t \in T, x \in A_{\lambda_t} \Rightarrow \forall t \in T, A(x) \geqslant \lambda_t \Rightarrow A(x) \geqslant \bigvee_{t\in T} \lambda_t = \lambda \Rightarrow x \in A_\lambda$,故 $\bigcap_{t\in T} A_{\lambda_t} \subseteq A_\lambda$,所以 $A_\lambda = \bigcap_{t\in T} A_{\lambda_t}$.

特别地,$\forall A \in F(X)$,有

(1) $$A_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha \tag{1.26}$$

(2) $$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha>\lambda} A_\alpha \tag{1.27}$$

注意(1) $$A_\lambda \supseteq \bigcup_{\alpha>\lambda} A_\alpha \tag{1.28}$$

(2) $$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha \tag{1.29}$$

定理 1.3.4 设 $A \in F(X), \lambda \in [0,1]$,则

(1) $$(A')_\lambda = (A_{\underset{\cdot}{1-\lambda}})' \tag{1.30}$$

(2) $$(A')_{\underset{\cdot}{\lambda}} = (A_{1-\lambda})' \tag{1.31}$$

证明 只证(1),(2)的证明类似.

$\forall x \in (A')_\lambda \Leftrightarrow A'(x) \geqslant \lambda \Leftrightarrow 1 - A(x) \geqslant \lambda \Leftrightarrow A(x) \leqslant 1 - \lambda \Leftrightarrow A(x) \not> 1 - \lambda \Leftrightarrow x \notin A_{\underset{\cdot}{1-\lambda}} \Leftrightarrow x \in (A_{\underset{\cdot}{1-\lambda}})'$. 所以 $(A')_\lambda = (A_{\underset{\cdot}{1-\lambda}})'$.

定义 1.3.2 设 $A \in F(X), \lambda \in [0,1], \forall x \in X$ 定义

$$(\lambda A)(x) = \lambda \wedge A(x) \tag{1.32}$$

则 $\lambda A \in F(X)$,称为数 λ 和 A 的乘积,如图 1.4 所示.

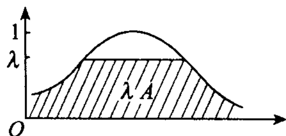


图 1.4

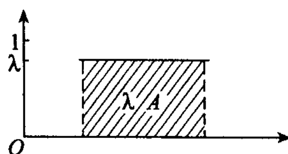


图 1.5

显然,(1) 若 $A \subseteq B$,则 $\lambda A \subseteq \lambda B$,

(2) 若 $\lambda \leqslant \mu$,则 $\lambda A \subseteq \mu A$. 特别地,若 $A \in P(X)$,则

$$(\lambda A)(x) = \begin{cases} \lambda, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

且 $\lambda A \in F(X)$,如图 1.5 所示.

定理 1.3.5(分解定理 1)　设 $A \in F(X)$,则

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_{\lambda}. \tag{1.33}$$

证明　$\forall x \in X$,有

$$\left(\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_{\lambda}\right)(x) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge A_{\lambda}(x))$$

$$= \left(\bigvee_{0 \leqslant \lambda \leqslant A(x)} \lambda \wedge A_{\lambda}(x)\right) \vee \left(\bigvee_{A(x) < \lambda \leqslant 1} \lambda \wedge A_{\lambda}(x)\right)$$

$$= \bigvee_{\lambda \leqslant A(x)} \lambda = A(x).$$

所以

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_{\lambda}.$$

定理 1.3.6(分解定理 2)　设 $A \in F(X)$,则

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}. \tag{1.34}$$

证明与定理 1.3.5 类似,从略.

推论 1.3.1　设 $A \in F(X)$,$L \subseteq [0,1]$,L 是稠密子集,则

$$A = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\lambda} = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}.$$

定理 1.3.7(分解定理 3)　设 $A \in F(X)$,映射 $H:[0,1] \to P(X)$ 满足:$\forall \lambda \in [0,1]$,$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_{\lambda}$,则

(1)
$$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda). \tag{1.35}$$

(2) $\lambda < \mu$,则 $H(\mu) \subseteq H(\lambda)$,

(3) $\forall \lambda \in [0,1]$,有

$$A_{\lambda} = \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) \tag{1.36}$$

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha) \tag{1.37}$$

证明　(1) 由于 $\forall \lambda \in [0,1]$,$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_{\lambda}$,则 $\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \lambda H(\lambda) \subseteq \lambda A_{\lambda}$,从而

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_{\lambda} = A,$$

所以

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda).$$

(2) 若 $\lambda < \mu$,则 $H(\mu) \subseteq A_{\mu} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda)$,所以　$H(\mu) \subseteq H(\lambda)$.

(3) 对于 $\lambda \in [0,1]$,$\forall \alpha \in [0,1]$,当 $\alpha < \lambda$ 时,$A_{\lambda} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H(\alpha)$,从而 $A_{\lambda} \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha)$.

另一方面,$\forall \alpha \in [0,1]$,$H(\alpha) \subseteq A_{\alpha}$,从而　$\bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} A_{\alpha} = A_{\lambda}$

所以

$$A_{\lambda} = \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha).$$

同理证

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcap_{\alpha > \lambda} H(\alpha).$$

§1.4 模糊集的表现定理

定义 1.4.1 映射 $H:[0,1]\to P(X),\lambda\to H(\lambda)$ 满足：$\forall\lambda,\mu\in[0,1]$，若 $\lambda\leqslant\mu$，则 $H(\mu)\subseteq H(\lambda)$，则称 H 为 X 上的集合套.

X 上的集合套全体记为 $H(X)$.

在 $H(X)$ 中定义关系"$\subseteq$"，$\forall H_1,H_2\in H(X)$，若 $\forall\lambda\in[0,1]$，$H_1(\lambda)\subseteq H_2(\lambda)$，则称 H_2 包含 H_1，记为 $H_1\subseteq H_2$. 若 $\forall\lambda\in[0,1]$，$H_1(\lambda)=H_2(\lambda)$，则称 H_1 和 H_2 相等，记为 $H_1=H_2$.

不难验证$(H(X),\subseteq)$是偏序集.

定义 1.4.2 设 $H_1,H_2\in H(X)$，定义运算

(1) $$(H_1\cup H_2)(\lambda)=H_1(\lambda)\cup H_2(\lambda) \tag{1.38}$$

(2) $$(H_1\cap H_2)(\lambda)=H_1(\lambda)\cap H_2(\lambda) \tag{1.39}$$

(3) $$H'(\lambda)=(H(1-\lambda))' \tag{1.40}$$

式(1.38) ~ 式(1.40) 分别称为 H_1 和 H_2 的并、交及 H 的余.

一般地，$\{H_t\mid t\in T\}\subseteq H(X)$，令 $\lambda\in[0,1]$

(1) $$\left(\bigcup_{t\in T}H_t\right)(\lambda)=\bigcup_{t\in T}H_t(\lambda) \tag{1.41}$$

(2) $$\left(\bigcap_{t\in T}H_t\right)(\lambda)=\bigcap_{t\in T}H_t(\lambda) \tag{1.42}$$

易证 $$\bigcup_{t\in T}H_t,\ \bigcap_{t\in T}H_t\in H(X).$$

定理 1.4.1 代数系统$(H(X),\cap,\cup,')$是具有最大元 $\overline{X}$ 和最小元 $\overline{\varnothing}$ 的软代数.

其中，$\overline{X}$ 和 $\overline{\varnothing}$ 分别定义为 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\overline{X}(\lambda)=X$，$\overline{\varnothing}(\lambda)=\varnothing$.

证明 由于 $H(X)$ 中的 $\cup$、$\cap$ 运算是由 $\lambda\in[0,1]$ 时集合的并、交定义的，所以 $H(X)$ 是具有最大元 $\overline{X}$ 和最小元 $\overline{\varnothing}$ 的分配格. 现验证对合律和对偶律. $\forall\lambda\in[0,1]$

$$(H')'(\lambda)=(H'(1-\lambda))'=((H(\lambda))')'=H(\lambda)，故(H')'=H.$$

$$\begin{aligned}(H_1\cup H_2)'(\lambda)&=((H_1\cup H_2)(1-\lambda))'=(H_1(1-\lambda)\cup H_2(1-\lambda))'\\&=(H_1(1-\lambda))'\cap(H_2(1-\lambda))'=H'_1(\lambda)\cap H'_2(\lambda)\\&=(H'_1\cap H'_2)(\lambda)\end{aligned}$$

故$(H_1\cup H_2)'=H'_1\cap H'_2$；同理$(H_1\cap H_2)'=H'_1\cup H'_2$.

所以$(H(X),\cup,\cap,')$是软代数.

定理 1.4.2(表现定理 3) 设 $f:H(X)\to F(X)$，$\forall H\in H(X)$，

$$f(H) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda) \tag{1.43}$$

则 f 是代数系统 $(H(X), \cup, \cap, ')$ 到代数系统 $(F(X), \cup, \cap, ')$ 的满同态映射，且 f 满足：

(1) $$(f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq (f(H))_\lambda \tag{1.44}$$

(2) $$(f(H))_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) \tag{1.45}$$

(3) $$(f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha). \tag{1.46}$$

证明 由于 $\forall H \in H(X), f(H) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda) \in F(X)$ 被惟一确定，所以 f 是 $H(X)$ 到 $F(X)$ 的映射.

另外，$\forall A \in F(X)$，取 $H(\lambda) = A_\lambda$，则 $H \in H(X)$ 且

$$f(H) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_\lambda = A$$

所以 f 是 $H(X)$ 到 $F(X)$ 的满射. 现证式(1.44).

若 $x \in H(\lambda)$，则 $H(\lambda)(x) = 1$，由此

$$\begin{aligned} f(H)(x) &= \Big(\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda)\Big)(x) \\ &= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge H(\lambda)(x)) \geqslant \lambda \wedge H(\lambda)(x) = \lambda \wedge 1 = \lambda, \end{aligned}$$

所以 $x \in (f(H))_\lambda$，即 $H(\lambda) \subseteq (f(H))_\lambda$.

另一方面，设 $x \notin H(\lambda)$ 则 $H(\lambda)(x) = 0$，而且当 $\alpha > \lambda$ 时，$H(\alpha)(x) = 0$，从而

$$\begin{aligned} f(H)(x) &= \Big(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha H(\alpha)\Big)(x) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} \alpha \wedge H(\alpha)(x) \\ &= \Big(\bigvee_{0 \leqslant \alpha \leqslant \lambda} \alpha \wedge H(\alpha)(x)\Big) \vee \Big(\bigvee_{\lambda < \alpha \leqslant 1} \alpha \wedge H(\alpha)(x)\Big) \\ &= \bigvee_{0 \leqslant \alpha \leqslant \lambda} \alpha \wedge H(\alpha)(x) \leqslant \bigvee_{\alpha \leqslant \lambda} \alpha = \lambda, \end{aligned}$$

即 $f(H)(x) \ngtr \lambda$，于是 $x \notin (f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，即证明了 $x \notin H(\lambda)$，则 $x \notin (f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，所以 $(f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda)$.

由此 $(f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq (f(H))_\lambda$.

由分解定理 3 立即可得式(1.45) 和式(1.46).

最后证 f 是同态映射. $\forall \{H_t \mid t \in T\} \subseteq H(X)$

$$\begin{aligned} \Big(f\Big(\bigcup_{t \in T} H_t\Big)\Big)_{\underset{\cdot}{\lambda}} &= \bigcup_{\alpha > \lambda} \Big(\bigcup_{t \in T} H_t\Big)(\alpha) = \bigcup_{\alpha > \lambda} \Big(\bigcup_{t \in T} H_t(\alpha)\Big) = \bigcup_{t \in T} \Big(\bigcup_{\alpha > \lambda} H_t(\alpha)\Big) \\ &= \bigcup_{t \in T} (f(H_t))_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \Big(\bigcup_{t \in T} f(H_t)\Big)_{\underset{\cdot}{\lambda}}, \end{aligned}$$

所以 $f\Big(\bigcup_{t \in T} A_t\Big) = \bigcup_{t \in T} f(H_t)$.

$$\left(f\left(\bigcap_{t\in T}H_t\right)\right)_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}\left(\bigcap_{t\in T}H_t\right)(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcap_{t\in T}H_t(\alpha)=\bigcap_{t\in T}\bigcap_{\alpha<\lambda}H_t(\alpha)$$

$$=\bigcap_{t\in T}(f(H_t))_\lambda=\left(\bigcap_{t\in T}f(H_t)\right)_\lambda,$$

所以$f\left(\bigcap_{t\in T}H_t\right)=\bigcap_{t\in T}f(H_t)$

$$(f(H'))_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H'(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}(H(1-\alpha))'=\left(\bigcup_{1-\lambda<1-\alpha}H(1-\alpha)\right)'$$

$$=\left(\bigcup_{\beta>1-\lambda}H(\beta)\right)'=(f(H)_{1-\lambda})'=((f(H))')_\lambda,$$

所以$f(H')=(f(H))'$

由此,f是$H(X)$到$F(X)$的满同态映射.

定理1.4.2说明代数系统$H(X)$和$F(X)$之间是满同态的关系,即不同的集合套可以对应于同一个模糊集,为了刻画它们之间的同构关系,我们在$H(X)$中引入一个等价关系.

设$f:H(X)\to F(X)$是满同态,$\forall H_1,H_2\in H(X)$.

$$H_1\sim H_2\Leftrightarrow f(H_1)=f(H_2)$$

易证"$\sim$"是$H(X)$中的等价关系,于是得商集,

$$H^*(X)=H(X)/\sim=\{[H]\mid H\in H(X)\}$$

$$[H]=\{H_1\mid H_1\sim H,H_1\in H(X)\}.$$

定理1.4.3 设$H_1,H_2\in H(X)$,则$H_1\sim H_2$的充分必要条件是下列条件之一成立,$\forall\lambda\in[0,1]$,

(1)
$$\bigcap_{\alpha<\lambda}H_1(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H_2(\alpha)\tag{1.47}$$

(2)
$$\bigcup_{\alpha>\lambda}H_1(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}H_2(\alpha).\tag{1.48}$$

证明 因为

$$H_1\sim H_2\Leftrightarrow f(H_1)=f(H_2)\Leftrightarrow(f(H_1))_\lambda=(f(H_2))_\lambda((f(H_1))_{\underset{\cdot}{\lambda}}=(f(H_2))_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

由式(1.45)、式(1.46)得

$$\bigcap_{\alpha<\lambda}H_1(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H_2(\alpha),\left(\bigcup_{\alpha>\lambda}H_1(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}H_2(\alpha)\right).$$

为了在$H^*(X)$中定义并、交、余运算,首先证明运算与代表无关,即证$\forall H_t\sim H_t^*(t\in T),H\sim H^*$,有

(1) $\bigcup_{\alpha>\lambda}\left(\bigcup_{t\in T}H_t\right)(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}\left(\bigcup_{t\in T}H_t^*\right)(\alpha)$;

(2) $\bigcap_{\alpha<\lambda}\left(\bigcap_{t\in T}H_t\right)(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\left(\bigcap_{t\in T}H_t^*\right)(\alpha)$;

(3) $\bigcap_{\alpha<\lambda}H'(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}(H^*)'(\alpha)$.

因为

$$\bigcup_{\alpha>\lambda}\left(\bigcup_{t\in T}H_t\right)(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}\left(\bigcup_{t\in T}H_t(\alpha)\right)=\bigcup_{t\in T}\left(\bigcup_{\alpha>\lambda}H_t(\alpha)\right)=\bigcup_{t\in T}\left(\bigcup_{\alpha>\lambda}H_t^*(\alpha)\right)$$

$$=\bigcup_{\alpha>\lambda}\left(\bigcup_{t\in T}H_t^*(\alpha)\right)=\bigcup_{\alpha>\lambda}\left(\bigcup_{t\in T}H_t^*\right)(\alpha),$$

所以 $\bigcup_{t\in T}H_t\sim\bigcup_{t\in T}H_t^*$.

同理可证 $\bigcap_{t\in T}H_t\sim\bigcap_{t\in T}H_t^*$.

另外

$$\bigcap_{\alpha<\lambda}H'(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}(H(1-\alpha))'=\left(\bigcup_{\alpha<\lambda}H(1-\alpha)\right)'=\left(\bigcup_{\alpha<\lambda}H^*(1-\alpha)\right)'$$

$$=\bigcap_{\alpha<\lambda}(H^*(1-\alpha))'=\bigcap_{\alpha<\lambda}(H^*)'(\alpha),$$

所以 $H'\sim(H^*)'$.

由此在 $H^*(X)$ 中定义运算:

(1) $$\bigcup_{t\in T}[H_t]=\left[\bigcup_{t\in T}H_t\right]\tag{1.49}$$

(2) $$\bigcap_{t\in T}[H_t]=\left[\bigcap_{t\in T}H_t\right]\tag{1.50}$$

(3) $$[H]'=[H']\tag{1.51}$$

定理 1.4.4 设 $f:H(X)\to F(X)$, $\forall H\in H(X)$,

$$f(H)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$$

则由 f 诱导的映射 $f^*:H^*(X)\to F(X)$, $\forall[H]\in H^*(X)$,

$$f^*([H])=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)\tag{1.52}$$

是代数系统 $(H^*(X),\cup,\cap,')$ 到代数系统 $(F(X),\cup,\cap,')$ 的同构映射,记为

$$H^*(X)\cong F(X).$$

下面介绍表现定理 1 和表现定理 2.

定义 1.4.3 (1) 设 $F\in H(X)$,若 F 满足:$\forall\{\lambda_t\mid t\in T\}\subseteq[0,1]$

$$F(0)=X,F\left(\bigvee_{t\in T}\lambda_t\right)=\bigcap_{t\in T}F(\lambda_t)$$

则称 F 是 X 上的一个集轮,X 上的所有集轮记为 $\Phi(X)$.

(2) 设 $\underset{\cdot}{F}\in H(X)$,若 $\underset{\cdot}{F}$ 满足:$\forall\{\lambda_t\mid t\in T\}\subseteq[0,1]$,

$$\underset{\cdot}{F}(1)=\varnothing,\underset{\cdot}{F}\left(\bigwedge_{t\in T}\lambda_t\right)=\bigcup_{t\in T}\underset{\cdot}{F}(\lambda_t)$$

则称 $\underset{\cdot}{F}$ 是 X 上的一个开集轮,X 上的所有开集轮记为 $\Phi^*(X)$.

例如,$A\in F(X)$,A 的 λ 截集满足(1),所以,$\forall\lambda\in[0,1]$,$F(\lambda)=A_\lambda$ 是 X

上的一个集轮;同样 A 的 λ 强截集 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 满足(2),所以 $\forall \lambda \in [0,1]$,$\underset{\cdot}{F}(\lambda) = A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 是 X 上的一个开集轮.

定理 1.4.5 设 $[H] \in H^*(X)$,则

(1) 惟一存在集轮 $F_H \in [H]$,

$$F_H(\lambda) = \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha) \tag{1.53}$$

(2) 惟一存在开集轮 $\underset{\cdot}{F}_H \in [H]$,

$$\underset{\cdot}{F}_H(\lambda) = \bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha) \tag{1.54}$$

(3)
$$\underset{\cdot}{F}_H \subseteq H \subseteq F_H (H \in [H]). \tag{1.55}$$

证明 由定理 1.4.3 知,等价类 $[H]$ 中 $\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$ 和 $\bigcup\limits_{\alpha>\lambda} H(\alpha)$ 的惟一性,决定了 F_H 和 $\underset{\cdot}{F}_H$ 的惟一性.

要证 $F_H \in [H]$,只须证 $f(F_H) = f(H)$.

$$(f(F_H))_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} F_H(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcap_{\beta<\alpha} H(\beta) = \bigcap_{\beta<\lambda} H(\beta) = (f(H))_\lambda,$$

所以 $f(F_H) = f(H)$,从而 $F_H \in [H]$.

又因为 $F_H(0) = H(0) = X, F_H(\lambda) = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} H(\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} F_H(\alpha)$ 故 F_H 是集轮.

同理证 $\underset{\cdot}{F}_H$ 是开集轮,且 $\underset{\cdot}{F}_H \in [H]$.

$\forall \lambda \in [0,1]$,若 $\alpha < \lambda, H(\lambda) \subseteq H(\alpha)$,则 $H(\lambda) \subseteq \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$,即 $H(\lambda) \subseteq F_H(\lambda)$,所以 $H \subseteq F_H$. 同理证 $\underset{\cdot}{F}_H \subseteq H$.

由式(1.55)知,集合 X 上的集轮 F_H 与开集轮 $\underset{\cdot}{F}_H$ 分别是等价类 $[H]$ 中的最大代表和最小代表,又因为等价类 $[H]$ 中的并、交、余运算与代表元无关,不难验证映射 $f:\Phi(X)(\Phi^*(X)) \to H^*(X)$,$f(F_H) = [H]$,$(f(\underset{\cdot}{F}_H) = [H])$ 是同构映射,由此证得定理.

定理 1.4.6 集合 X 上的集轮,开集轮与集合套等价类同构,即

(1) $(\Phi(X), \cap, \cup, ') \cong (H^*(X), \cap, \cup, ')$;

(2) $(\Phi^*(X), \cap, \cup, ') \cong (H^*(X), \cap, \cup, ')$.

推论 1.4.1(表现定理 1) 设 $f:\Phi(X) \to F(X)$,

$$f(F_H) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda F_H(\lambda) \tag{1.56}$$

则 f 是 $\Phi(X)$ 到 $F(X)$ 的同构映射,即 $\Phi(X) \cong F(X)$.

推论 1.4.2(表现定理 2) 设 $f:\Phi^*(X) \to F(X)$,

$$f(\underset{\cdot}{F}_H) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda \underset{\cdot}{F}_H(\lambda) \tag{1.57}$$

则 f 是 $\Phi^*(X)$ 到 $F(X)$ 的同构映射,即 $\Phi^*(X) \cong F(X)$.

§1.5　模糊集的扩张原理

设 X,Y 是论域，$f:X \to Y$ 是映射，则 f 可以诱导一个从 $P(X)$ 到 $P(Y)$ 的映射（变换），仍然记为 f:

$$f:P(X) \to P(Y)$$
$$A \to f(A) \triangleq \{f(x) \mid x \in A\} \tag{1.58}$$

同样 f 诱导一个 $P(Y)$ 到 $P(X)$ 的映射（变换），为 f^{-1}:

$$f^{-1}:P(Y) \to P(X)$$
$$B \to f^{-1}(B) \triangleq \{x \in X \mid f(x) \in B\} \tag{1.59}$$

称 $f(A)$ 为 A 的像，$f^{-1}(B)$ 为 B 的原像，如图 1.6、图 1.7 所示.

显然，像集和原像集满足：

(1) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$，当 f 是单射时等式成立；

(2) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$，当 f 是满射时等式成立.

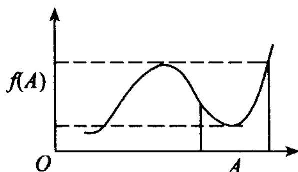


图 1.6

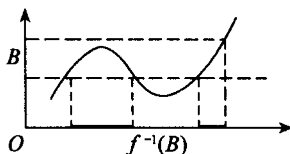


图 1.7

定义 1.5.1　设 $f:X \to Y$，则 f 诱导的映射 $f:F(X) \to F(Y)$

$$A \to f(A) \triangleq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(A_\lambda) \tag{1.60}$$

称为 f 诱导的 $F(X)$ 到 $F(Y)$ 的映射，也称 f 诱导的从 X 到 Y 的模糊变换，简称 F 变换，$f(A)$ 称为 A 的像.

由 f 诱导的映射 $f^{-1}:F(Y) \to F(X)$

$$B \to f^{-1}(B) \triangleq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(B_\lambda) \tag{1.61}$$

称为 f 诱导的 $F(Y)$ 到 $F(X)$ 的映射，也称为 f 诱导的从 Y 到 X 的模糊变换，$f^{-1}(B)$ 称为 B 的原像.

$\forall \lambda_1,\lambda_2 \in [0,1]$

若 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2, A_{\lambda_2} \subseteq A_{\lambda_1}$，则 $f(A_{\lambda_2}) \subseteq f(A_{\lambda_1})$.

若 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2, B_{\lambda_2} \subseteq B_{\lambda_1}$，则 $f^{-1}(B_{\lambda_2}) \subseteq f^{-1}(B_{\lambda_1})$.

所以 $f(A_\lambda), f^{-1}(B_\lambda)(\lambda \in [0,1])$ 分别是 Y 中的和 X 中的集合套，由此，定义

1.5.1 是合理的.

定理 1.5.1(扩张原理 1)　设 $f:X \to Y$.

(1) 若 $A \in F(X)$,则 $\forall y \in Y$

$$f(A)(y) = \bigvee_{f(x)=y} A(x) \tag{1.62}$$

特别地,若 $\{x \in X \mid f(x) = y\} = \varnothing$,规定 $f(A)(y) = 0$.

(2) 若 $B \in F(Y)$,则 $\forall x \in X$

$$f^{-1}(B)(x) = B(f(x)) \tag{1.63}$$

证明　(1)
$$\begin{aligned} f(A)(y) &= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(A_\lambda)(y) \\ &= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda \wedge f(A_\lambda)(y) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda \mid y \in f(A_\lambda)\} \\ &= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda \mid \exists x \in A_\lambda, f(x) = y\} \\ &= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \quad \bigvee_{f(x)=y} \{\lambda \mid \exists x \in A_\lambda\} \\ &= \bigvee_{f(x)=y} \quad \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda \mid \exists x \in A_\lambda\} \\ &= \bigvee_{f(x)=y} \left(\bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda \wedge A_\lambda(x) \right) = \bigvee_{f(x)=y} A(x) \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} f^{-1}(B)(x) &= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(B_\lambda)(x) \\ &= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge f^{-1}(B_\lambda)(x)) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda \mid x \in f^{-1}(B_\lambda)\} \\ &= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda \mid f(x) \in B_\lambda\} = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge B_\lambda(f(x))) \\ &= B(f(x)) \end{aligned}$$

定理 1.5.2(扩张原理 2)　设 $f:X \to Y$.

(1) 若 $A \in F(X)$,则

$$f(A) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(A_\lambda) \tag{1.64}$$

(2) 若 $B \in F(Y)$,则

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(B_\lambda) \tag{1.65}$$

用类似于定理 1.5.1 的证明方法,只须验证

$$f(A)(y) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(A_\lambda)(y) = \bigvee_{f(x)=y} A(x)$$
$$f^{-1}(B)(x) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(B_\lambda)(x) = B(f(x)).$$

定理 1.5.3(扩张原理 3)　设 $f:X \to Y$.

(1) 若 $A \in F(X)$,则

$$f(A) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(H_A(\lambda)) \tag{1.66}$$

其中 H_A 满足:$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H_A(\lambda) \subseteq A_\lambda$.

(2) 若 $B \in F(Y)$,则

$$f^{-1}(B)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(H_B(\lambda))\qquad(1.67)$$

其中 H_B 满足：$B_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H_B(\lambda)\subseteq B_\lambda$.

定理 1.5.4(复合映射的扩张原理)　设 $f:X\to Y,g:Y\to Z,g\circ f:X\to Z$ 是 f 和 g 的复合映射，则：

(1) $\forall A\in F(X)$，有

$$(g\circ f)(A)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda g(f(A_\lambda))\qquad(1.68)$$

(2) $\forall B\in F(Y)$，有

$$(f\circ g)^{-1}(B)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(g^{-1}(B_\lambda)).\qquad(1.69)$$

证明　(1) 只须证明 $(g\circ f)(A_\lambda)=g(f(A_\lambda))$.

$$\begin{aligned}(g\circ f)(A_\lambda)&=\{z\in Z\mid\exists x\in A_\lambda,(g\circ f)(x)=g(f(x))=z\}\\&=\{z\in Z\mid\exists x\in A_\lambda,f(x)=y,g(y)=z\}\\&=\{z\in Z\mid\exists y\in f(A_\lambda),g(y)=z\}\\&=\{z\in Z\mid\exists z\in g(f(A_\lambda))\}=g(f(A_\lambda))\end{aligned}$$

所以 $(g\circ f)(A)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda g(f(A_\lambda))$.

同理证明(2).

定理 1.5.5　设 $f:X\to Y$.

(1) 若 $A\in F(X)$，则 $f^{-1}(f(A))\supseteq A$，当 f 是单射时等号成立；

(2) 若 $B\in F(Y)$，则 $f(f^{-1}(B))\subseteq B$，当 f 是满射时等号成立.

证明　(1) $\forall x\in X$,

$$f^{-1}(f(A))(x)=f(A)(f(x))=\bigvee_{f(t)=f(x)}A(t)\geqslant A(x)$$

当 f 是单射时，$\bigvee_{f(t)=f(x)}A(t)=A(x)$. 所以当 f 是单射时，$f^{-1}(f(A))=A$.

(2) $\forall y\in Y$,

$$\begin{aligned}f(f^{-1}(B))(y)&=\bigvee_{f(x)=y}f^{-1}(B)(x)=\bigvee_{f(x)=y}B(f(x))\\&=\begin{cases}B(y), & \exists x\in X,f(x)=y\\0, & \forall x\in X\quad f(x)\neq y\end{cases}\leqslant B(y)\end{aligned}$$

当 f 是满射时，上式为 0 的情况不成立，故 $f(f^{-1}(B))(y)=B(y)$，所以 f 是满射时，$f(f^{-1}(B))=B$.

§1.6　模糊集的多元扩张原理

定理 1.6.1　设 $A_i\in P(X_i)(i=1,2,\cdots,n)$，则笛卡儿积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 的特征函数，$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$，有

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i). \tag{1.70}$$

证明 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 1 \Leftrightarrow (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \Leftrightarrow \forall i, x_i \in A_i, \Leftrightarrow \forall i, A_i(x_i) = 1 \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i) = 1.$

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0 \Leftrightarrow (x_1,x_2,\cdots,x_n) \notin A_1 \times A_2 \times \cdots \times$

$$A_n \Leftrightarrow \exists i, x_i \notin A_i \Leftrightarrow \exists i, A_i(x_i) = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x) = 0$$

所以 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)$.

设 $A^{(i)} \in F(X_i)$, $\forall \lambda,\mu \in [0,1]$,若 $\lambda \leqslant \mu$,则 $A_\mu^{(i)} \subseteq A_\lambda^{(i)}$,于是

$$A_\mu^{(1)} \times A_\mu^{(2)} \times \cdots \times A_\mu^{(n)} \subseteq A_\lambda^{(1)} \times A_\lambda^{(2)} \times \cdots \times A_\lambda^{(n)},$$

所以 $\{A_\lambda^{(1)} \times A_\lambda^{(2)} \times \cdots \times A_\lambda^{(n)} \mid \lambda \in [0,1]\}$ 是 $P(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n)$ 上的集合套,由此给出 F 集的笛卡儿积的定义.

定义 1.6.1 设 $A^{(i)} \in F(X_i)(i = 1,2,\cdots,n)$,则

$$A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda (A_\lambda^{(1)} \times A_\lambda^{(2)} \times \cdots \times A_\lambda^{(n)}) \tag{1.71}$$

称为 F 集 $A^{(i)}(i = 1,2,\cdots,n)$ 的笛卡儿积,简称直积.

定理 1.6.2 设 $A^{(i)} \in F(X_i)(i = 1,2,\cdots,n)$ 则

$$A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} A^{(i)}(x_i). \tag{1.72}$$

证明

$$\begin{aligned} & A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ &= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda (A_\lambda^{(1)} \times A_\lambda^{(2)} \times \cdots \times A_\lambda^{(n)})(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ &= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda \wedge (A_\lambda^{(1)} \times A_\lambda^{(2)} \times \cdots \times A_\lambda^{(n)})(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ &= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_\lambda^{(i)}(x_i) \right) \\ &\leqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge A_\lambda^{(i)}(x_i)) \end{aligned}$$

若等号不成立,则 $\exists \alpha \in [0,1]$ 使

$$\bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_\lambda^{(i)}(x_i) \right) < \alpha < \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge A_\lambda^{(i)}(x_i))$$

由于 $\bigwedge_{i=1}^{n} A_\alpha^{(i)}(x_i) \in \{0,1\}$,则:

若 $\bigwedge_{i=1}^{n} A_\alpha^{(i)}(x_i) = 1$,则 $\alpha > \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_\lambda^{(i)}(x_i) \right) \geqslant \alpha \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_\alpha^{(i)}(x_i) \right) = \alpha$,矛盾;

若 $\bigwedge_{i=1}^{n} A_\alpha^{(i)}(x_i) = 0$,则 $\exists i_0, A_\alpha^{(i_0)}(x_{i_0}) = 0$,则 $\forall \lambda \geqslant \alpha$ 时,$A_\lambda^{(i_0)}(x_{i_0}) = 0$,于

是 $\alpha < \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge A_\lambda^{(i)}(x_i)) \leqslant \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda \wedge A_\lambda^{(i_0)}(x_{i_0}) = \bigvee_{\lambda \in [0,\alpha]} \lambda \wedge A_\lambda^{(i_0)}(x_{i_0}) \leqslant \alpha$,矛盾.

由此,$A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge A_\lambda^{(i)}(x_i)) = \bigwedge_{i=1}^{n} A^{(i)}(x_i)$.

定理 1.6.3　设 $A^{(i)} \in F(X_i)(i = 1,2,\cdots,n)$,则:

$$(1)\qquad (A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)})_\lambda = A_\lambda^{(1)} \times A_\lambda^{(2)} \times \cdots \times A_\lambda^{(n)} \tag{1.73}$$

$$(2)\qquad (A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(1)} \times A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(2)} \times \cdots \times A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(n)}. \tag{1.74}$$

证明　(1) $\forall (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in (A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots A^{(n)})_\lambda \Leftrightarrow$$

$(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)})(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} A^{(i)}(x_i) \geqslant \lambda \Leftrightarrow \forall i, A^{(i)}(x_i) \geqslant \lambda \Leftrightarrow \forall i, x_i \in A_\lambda^{(i)} \Leftrightarrow (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in A_\lambda^{(1)} \times A_\lambda^{(2)} \times \cdots \times A_\lambda^{(n)}$

所以 $(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)})_\lambda = A_\lambda^{(1)} \times A_\lambda^{(2)} \times \cdots \times A_\lambda^{(n)}$.

同理证明(2).

推论 1.6.1　设 $A^{(i)} \in F(X_i)(i = 1,2,\cdots,n)$,则

$$A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(1)} \times A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(2)} \times \cdots \times A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(n)}).$$

推论 1.6.2　设 $A^{(i)} \in F(X_i)(i = 1,2,\cdots,n)$,若 $\forall \lambda \in [0,1], A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(i)} \subseteq H_A^{(i)}(\lambda) \subseteq A_\lambda^{(i)}(i = 1,2,\cdots,n)$,则

$$A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(H_A^{(1)}(\lambda) \times H_A^{(2)}(\lambda) \times \cdots \times H_A^{(n)}(\lambda)).$$

下面介绍多元扩张原理.

定理 1.6.4　设 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, Y = Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m, f: X \to Y, (x_1, x_2,\cdots,x_n) \to f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 则:

(1) f 诱导映射 $f: P(X_1) \times P(X_2) \times \cdots \times P(X_n) \to P(Y)$,
$\forall (A_1,A_2,\cdots,A_n) \in P(X_1) \times P(X_2) \times \cdots \times P(X_n)$,

$$f(A_1,A_2,\cdots,A_n) = f(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n).$$

(2) f 诱导映射 $f^{-1}: P(Y_1) \times P(Y_2) \times \cdots \times P(Y_m) \to P(X)$,
$\forall (B_1,B_2,\cdots,B_m) \in P(Y_1) \times P(Y_2) \times \cdots \times P(Y_m)$,

$$f^{-1}(B_1,B_2,\cdots,B_m) = f^{-1}(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m).$$

证明　(1) $f(A_1,A_2,\cdots,A_n)$

$= \{y \mid \exists (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n, f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = y\}$

$= f(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)$

$$(2) f^{-1}(B_1,B_2,\cdots,B_m) = \{x \mid f(x) \in (B_1,B_2,\cdots,B_m)\}$$
$$= \{x \mid f(x) \in B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m\}$$
$$= f^{-1}(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m)$$

我们称$f(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)$为$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$的像,称$f^{-1}(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m)$为$(B_1,B_2,\cdots,B_m)$的原像.

定义 1.6.2 设$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, $Y = Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m$, $f:X \to Y$, $(x_1,x_2,\cdots,x_n) \to f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (y_1,y_2,\cdots,y_m)$,则:

(1)f诱导映射$f:F(X_1) \times F(X_2) \times \cdots \times F(X_n) \to F(Y)$,

$(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)}) \to f(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)}) \triangleq f(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)})$.

(2)f诱导映射的$f^{-1}:F(Y_1) \times F(Y_2) \times \cdots \times f(Y_m) \to F(X)$,

$(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)}) \to f^{-1}(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)}) \triangleq f^{-1}(B^{(1)} \times B^{(2)} \times \cdots \times B^{(m)})$.

则称$f(A^{(1)} \times A^{(1)} \times \cdots \times A^{(n)})$为$(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)})$的像,称$f^{-1}(B^{(1)} \times B^{(2)} \times \cdots \times B^{(m)})$为$(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)})$的原像.

定理 1.6.5 设$f:X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m$, $(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)}) \in F(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n)$, $(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)}) \in F(Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m)$,则:

$$(1)\quad f(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)})(y) = \bigvee_{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} A^{(i)}(x_i)\right) \tag{1.75}$$

$$(2)\quad f^{-1}(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)})(x) = \bigwedge_{i=1}^{n} B^{(i)}(y_i) \tag{1.76}$$

其中$y = (y_1,y_2,\cdots,y_m)$, $x = (x_1,x_2,\cdots,x_n)$且$f(x) = y$.

证明 $(1) f(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)})(y) = f(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)})(y)$

$$= \bigvee_{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y} (A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)})(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$= \bigvee_{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} A^{(i)}(x_i)\right)$$

$$(2) f^{-1}(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)})(x) = f^{-1}(B^{(1)} \times B^{(2)} \times \cdots \times B^{(m)})(x)$$

$$= (B^{(1)} \times B^{(2)} \times \cdots \times B^{(m)})(y) = \bigwedge_{i=1}^{n} B^{(i)}(y_i)$$

推论 1.6.3 设$*$是X中的二元运算,$A,B \in F(X)$,则$\forall z \in X$,

$$(A * B)(z) = \bigvee_{x * y = z} (A(x) \wedge B(y)) \tag{1.77}$$

定理 1.6.6 (多元扩张原理1) 设$f:X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m$, $(A_1^{(1)},A_1^{(2)},\cdots,A^{(n)}) \in F(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n)$, $(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)}) \in F(Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m)$,则:

$$(1)\quad f(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(A_\lambda^{(1)} \times A_\lambda^{(2)} \times \cdots \times A_\lambda^{(n)})$$

$$= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(A_\lambda^{(1)}, A_\lambda^{(2)}, \cdots, A_\lambda^{(n)}) \tag{1.78}$$

(2) $f^{-1}(B^{(1)}, B^{(2)}, \cdots, B^{(m)}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(B_\lambda^{(1)} \times B_\lambda^{(2)} \times \cdots \times B_\lambda^{(m)})$

$$= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(B_\lambda^{(1)}, B_\lambda^{(2)}, \cdots, B_\lambda^{(m)}). \tag{1.79}$$

证明　(1) $f(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}) = f(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)})$

$= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)})_\lambda = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(A_\lambda^{(1)} \times A_\lambda^{(2)} \times \cdots \times A_\lambda^{(n)})$

又因为　$f(A_\lambda^{(1)}, A_\lambda^{(2)}, \cdots, A_\lambda^{(n)}) = f(A_\lambda^{(1)} \times A_\lambda^{(2)} \times \cdots \times A_\lambda^{(n)})$

所以 $f(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(A_\lambda^{(1)}, A_\lambda^{(2)}, \cdots, A_\lambda^{(n)})$.

同理证明(2).

定理 1.6.7(多元扩张原理2)　设 $f: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m$. $(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}) \in F(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n)$, $(B^{(1)}, B^{(2)}, \cdots, B^{(m)}) \in F(Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m)$,则:

(1) $f(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(1)} \times A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(2)} \times \cdots \times A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(n)})$

$$= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(1)}, A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(2)}, \cdots, A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(n)}) \tag{1.80}$$

(2) $f^{-1}(B^{(1)}, B^{(2)}, \cdots, B^{(m)}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(1)} \times B_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(2)} \times \cdots \times B_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(m)})$

$$= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(1)}, B_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(2)}, \cdots, B_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(m)}). \tag{1.81}$$

定理的证明类似于定理 1.6.6.

定理 1.6.8(多元扩张原理3)　设 $f: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m$, $(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}) \in F(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n)$, $(B^{(1)} \times B^{(2)} \times \cdots \times B^{(m)}) \in F(Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m)$,则:

(1) $f(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(H_A^{(1)}(\lambda) \times H_A^{(2)}(\lambda) \times \cdots \times H_A^{(n)}(\lambda))$

$$= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(H_A^{(1)}(\lambda), H_A^{(2)}(\lambda), \cdots, H_A^{(n)}(\lambda)) \tag{1.82}$$

(2) $f^{-1}(B^{(1)}, B^{(2)}, \cdots, B^{(m)}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(H_B^{(1)}(\lambda) \times H_B^{(2)}(\lambda) \times \cdots \times H_B^{(m)}(\lambda))$

$$= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(H_B^{(1)}(\lambda), H_B^{(2)}(\lambda), \cdots, H_B^{(m)}(\lambda)) \tag{1.83}$$

其中, $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(i)} \subseteq H_A^{(i)}(\lambda) \subseteq A_\lambda^{(i)}$　$(i = 1, 2, \cdots, n)$, $B_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(i)} \subseteq H_B^{(i)}(\lambda) \subseteq B_\lambda^{(i)}$　$(i = 1, 2, \cdots, m)$.

证明　(1) 由于 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(i)} \subseteq H_A^{(i)} \subseteq A_\lambda^{(i)}$,则

$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(1)} \times A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(2)} \times \cdots \times A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(n)} \subseteq H_A^{(1)}(\lambda) \times H_A^{(2)}(\lambda) \times \cdots \times H_A^{(n)}(\lambda) \subseteq A_\lambda^{(1)} \times A_\lambda^{(2)} \times \cdots \times A_\lambda^{(n)}$ 由此

$$f(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)}) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f(A_\lambda^{(1)} \times A_\lambda^{(2)} \times \cdots \times A_\lambda^{(n)})$$

$\subseteq \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f(H_A^{(1)}(\lambda) \times H_A^{(2)}(\lambda) \times \cdots \times H_A^{(n)}(\lambda)) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f(H_A^{(1)}(\lambda), H_A^{(2)}(\lambda)\cdots,H_A^{(n)}(\lambda))$

$\subseteq \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f(A_\lambda^{(1)} \times A_\lambda^{(2)} \times \cdots \times A_\lambda^{(n)}) = f(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)})$

所以 $f(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)}) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f(H_A^{(1)}(\lambda) \times H_A^{(2)}(\lambda) \times \cdots \times H_A^{(n)}(\lambda))$

$$= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} f(H_A^{(1)}(\lambda), H_A^{(2)}(\lambda), \cdots, H_A^{(n)}(\lambda)).$$

同理证明(2).

推论 1.6.4 设 $*$ 是 X 中的二元运算,$A,B \in F(X)$,则:

(1)
$$A * B = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda(A_\lambda * B_\lambda) \tag{1.84}$$

(2)
$$A * B = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda(A_{\underset{\sim}{\lambda}} * B_{\underset{\sim}{\lambda}}) \tag{1.85}$$

特别地,设 $\mathbf{R}$ 是实数域,$\mathbf{R}$ 中的运算集为 $\{+, -, \cdot, \div, \wedge, \vee\}$,则 $\forall A,B \in F(\mathbf{R})$,

$$A + B = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda(A_\lambda + B_\lambda) \tag{1.86}$$

$$A - B = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda(A_\lambda - B_\lambda) \tag{1.87}$$

$$A \cdot B = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda(A_\lambda \cdot B_\lambda) \tag{1.88}$$

$$A \div B = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda(A_\lambda \div B_\lambda) \tag{1.89}$$

$$A \vee B = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda(A_\lambda \vee B_\lambda) \tag{1.90}$$

$$A \wedge B = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda(A_\lambda \wedge B_\lambda) \tag{1.91}$$

又由推论 1.6.3 中的式(1.77)得,$\forall z \in \mathbf{R}$

$$(A + B)(z) = \bigvee_{x+y=z} (A(x) \wedge B(y)) = \bigvee_{x\in R} (A(x) \wedge B(z - x) \tag{1.92}$$

$$(A - B)(z) = \bigvee_{x-y=z} (A(x) \wedge B(y)) = \bigvee_{x\in R} (A(x) \wedge B(x - z)) \tag{1.93}$$

$$(A \cdot B)(z) = \bigvee_{x\cdot y=z} (A(x) \wedge B(y)) = \bigvee_{x\in R} \left(A(x) \wedge B\left(\frac{z}{x}\right)\right)(x \neq 0) \tag{1.94}$$

$$(A \div B)(z) = \bigvee_{x\div y=z} (A(x) \wedge B(y)) = \bigvee_{y\in R} (A(yz) \wedge B(y))(y \neq 0) \tag{1.95}$$

$$(A \vee B)(z) = \bigvee_{x\vee y=z} (A(x) \wedge B(y)) \tag{1.96}$$

$$(A \wedge B)(z) = \bigvee_{x\wedge y=z} (A(x) \wedge B(y)). \tag{1.97}$$

§1.7　L型模糊集及其分解定理

定义 1.7.1　设 X 是集合,$(L, \wedge, \vee)$ 是格,则映射

$$A: X \to L, x \to A(x)$$

称为 X 上的一个 L 型模糊集,简称 L-F 集. 此时,X 称为论域,L 称为值格,$\forall x \in X$,$A(x)$ 称为 x 关于 A 的隶属度.

X 上的 L 型模糊集全体记为 $F_L(X)$ 或 L^X,即

$$F_L(X) = \{A \mid A: X \to L\}. \tag{1.98}$$

定义 1.7.2　设 $A, B \in F_L(X)$.

(1) 若 $\forall x \in X, A(x) \leqslant B(x)$,则称 A 包含于 B,或称 B 包含 A,记为 $A \subseteq B$;

(2) 若 $\forall x \in X, A(x) = B(x)$,则称 A 和 B 相等,记为 $A = B$.

显然,$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

定义 1.7.3　设 $A, B \in F_L(X)$,$\forall x \in X$,定义:

(1)　$$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x) \tag{1.99}$$

(2)　$$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x) \tag{1.100}$$

分别称为 A 和 B 的并和交.

如果 L 是完备格,$\{A_t \mid t \in T\} \subseteq F_L(X)$,记

(3)　$$(\bigcup_{t \in T} A_t)(x) = \bigvee_{t \in T} A_t(x) \tag{1.101}$$

(4)　$$(\bigcap_{t \in T} A_t)(x) = \bigwedge_{t \in T} A_t(x) \tag{1.102}$$

分别称为 $\{A_t \mid t \in T\}$ 的无限并和无限交.

定义 1.7.4　设格 L 上有逆序对合对应"$'$",则 $\forall x \in X$,记

$$A'(x) = (A(x))' \tag{1.103}$$

则称 A' 为 A 的补集.

由于 $F_L(X)$ 上的运算 $\cup, \cap, '$ 是由 L 上的运算 $\vee, \wedge, '$ 定义的,所以 $(L, \wedge, \vee)$ 是格,则 $(F_L(X), \wedge, \vee)$ 是格;若 L 是分配格,则 $F_L(X)$ 是分配格;若 L 是完备格,则 $F_L(X)$ 是完备格;若 $(L, \wedge, \vee, ')$ 是具有逆序对合对应的完全分配格,则 $(F_L(X), \cap, \cup, ')$ 也是具有逆序对合对应的完全分配格,即 $F_L(X)$ 是模糊格.

例 1.7.1　设 $L = P(Y)$,令

$$A: X \to P(Y)$$

由于 $(P(Y), \cap, \cup)$ 是完全分配格,则 $(F_L(X), \cap, \cup)$ 也是完全分配格. 此时,A 的隶属函数的值是 Y 的子集,A 称为 X 到 $P(Y)$ 的集值映射.

例 1.7.2 设 $L = F_{[0,1]}(X)$ 是 X 上模糊集全体，令

$$A: X \to F_{[0,1]}(X)$$

是 X 上的二型模糊集. 此时，A 的隶属度 $A(x)$ 是 X 上的一个模糊集.

例 1.7.3 设 $L = \{[a,b] \mid a \leqslant b, a,b \in [0,1]\}$，$\forall [a,b],[c,d] \in L$，定义

$$[a,b] \leqslant [c,d] \Leftrightarrow a \leqslant c, b \leqslant d$$

则 $(L, \leqslant)$ 是格，又定义

$$([a,b])' = [1-b, 1-a]$$

是 L 中的伪补.

$\forall [a_t, b_t] \in L(t \in T)$，定义

$$\bigvee_{t \in T} [a_t, b_t] = \left[\bigvee_{t \in T} a_t, \bigvee_{t \in T} b_t\right]$$

$$\bigwedge_{t \in T} [a_t, b_t] = \left[\bigwedge_{t \in T} a_t, \bigwedge_{t \in T} b_t\right]$$

则 L 是完备格，即 L 是具有伪补的完备格，令

$$A: X \to L$$

则 $(F_L(X), \cap, \cup, ')$ 是具有伪补的完备格，$A(x)$ 是 $[0,1]$ 中的一个区间数.

定义 1.7.5 设 $A \in F_L(X)$，$\forall \lambda \in L$，记

$$A_\lambda = \{x \in X \mid A(x) \geqslant \lambda\} \tag{1.104}$$

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \{x \in X \mid A(x) > \lambda\} \tag{1.105}$$

分别称为 L 型模糊集 A 的 λ 截集和 λ 强截集.

显然，(1) $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq A_\lambda \subseteq X$.

(2) $\forall \lambda, \mu \in L$，若 $\lambda \leqslant \mu$，则 $A_\mu \subseteq A_\lambda$，$A_{\underset{\cdot}{\mu}} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，$A_\mu \subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

定理 1.7.1 设 L 是格，$A, B \in F_L(X)$，$\forall \lambda \in L$，则：

(1) $$(A \cup B)_\lambda \supseteq A_\lambda \cup B_\lambda \tag{1.106}$$

(2) $$(A \cap B)_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda \tag{1.107}$$

(3) $$(A \cup B)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \supseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \cup B_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{1.108}$$

(4) $$(A \cap B)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \cap B_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{1.109}$$

证明 只证(1)、(2)，其他类似证明.

(1) $\forall x \in A_\lambda \cup B_\lambda \Rightarrow x \in A_\lambda$ 或 $x \in B_\lambda \Rightarrow A(x) \geqslant \lambda$ 或 $B(x) \geqslant \lambda \Rightarrow A(x) \vee B(x) \geqslant \lambda \Rightarrow (A \cup B)(x) \geqslant \lambda \Rightarrow x \in (A \cup B)_\lambda$. 所以 $A_\lambda \cup B_\lambda \subseteq (A \cup B)_\lambda$.

(2) $\forall x \in (A \cap B)_\lambda \Leftrightarrow (A \cap B)(x) \geqslant \lambda \Leftrightarrow A(x) \wedge B(x) \geqslant \lambda \Leftrightarrow A(x) \geqslant \lambda$ 且 $B(x) \geqslant \lambda \Leftrightarrow x \in A_\lambda$ 且 $x \in B_\lambda \Leftrightarrow x \in A_\lambda \cap B_\lambda$，所以 $(A \cap B)_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$.

若 L 是全序集，易证定理 1.7.1 中的 4 个式子等式成立.

定理 1.7.2　设 L 是完备格，$\{A_t \mid t \in T\} \subseteq F_L(X)$，$\forall \lambda \in L$，则：

(1)
$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)_\lambda \supseteq \bigcup_{t \in T} (A_t)_\lambda \tag{1.110}$$

(2)
$$\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right)_\lambda = \bigcap_{t \in T} (A_t)_\lambda \tag{1.111}$$

(3)
$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \supseteq \bigcup_{t \in T} (A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{1.112}$$

(4)
$$\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcap_{t \in T} (A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{1.113}$$

若 L 是稠密的完备格时，(3) 的等号成立，即

$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{t \in T} (A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{1.114}$$

证明　只证(2)、(3)，其他类似证明.

(2) $\forall x \in \left(\bigcap_{t \in T} A_t\right)_\lambda \Leftrightarrow \left(\bigcap_{t \in T} A_t\right)(x) \geqslant \lambda \Leftrightarrow \bigwedge_{t \in T} A_t(x) \geqslant \lambda \Leftrightarrow \forall t \in T, A_t(x) \geqslant \lambda \Leftrightarrow \forall t \in T, x \in (A_t)_\lambda \Leftrightarrow x \in \bigcap_{t \in T} (A_t)_\lambda$，所以 $\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right)_\lambda = \bigcap_{t \in T} (A_t)_\lambda$.

(3) $\forall x \in \bigcup_{t \in T} (A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \Rightarrow \exists t \in T, x \in (A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \Rightarrow \exists t \in T, A_t(x) > \lambda \Rightarrow \bigvee_{t \in T} A_t(x) > \lambda \Rightarrow \left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)(x) > \lambda \Rightarrow x \in \left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，所以 $\bigcup_{t \in T} (A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

若 L 是稠密格，(3) 的推导过程的逆全成立，故 $\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{t \in T} (A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

定理 1.7.3　设 L 是完备格，$A \in F_L(X)$，$\{\alpha_t \mid t \in T\} \subseteq L$，若 $\bigvee_{t \in T} \alpha_t = \alpha$，$\bigwedge_{t \in T} \alpha_t = \beta$，则：

(1)
$$A_\alpha = \bigcap_{t \in T} A\alpha_t \tag{1.115}$$

(2)
$$A_\beta \supseteq \bigcup_{t \in T} A\alpha_t \tag{1.116}$$

(3)
$$A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq \bigcap_{t \in T} A\underset{\cdot}{\alpha}_t \tag{1.117}$$

(4)
$$A_{\underset{\cdot}{\beta}} \supseteq \bigcup_{t \in T} A\underset{\cdot}{\alpha}_t \tag{1.118}$$

若 L 是稠密的完备格时，(4) 的等号成立，即

$$A_{\underset{\cdot}{\beta}} = \bigcup_{t \in T} A\underset{\cdot}{\alpha}_t. \tag{1.119}$$

证明　只证(1)、(4)，其他类似证明.

(1) 因为 $\bigvee_{t \in T} \alpha_t = \alpha \Rightarrow \forall t \in T, \alpha_t \leqslant \alpha \Rightarrow A_\alpha \subseteq A\alpha_t \Rightarrow A_\alpha \subseteq \bigcap_{t \in T} A\alpha_t$.

反之，$\forall x \in \bigcap_{t \in T} A\alpha_t \Rightarrow \forall t \in T, x \in A\alpha_t \Rightarrow \forall t \in T, A(x) \geqslant \alpha_t \Rightarrow A(x) \geqslant \bigvee_{t \in T} \alpha_t = \alpha \Rightarrow x \in A_\alpha \Rightarrow \bigcap_{t \in T} A\alpha_t \subseteq A_\alpha$，所以 $A_\alpha = \bigcap_{t \in T} A\alpha_t$.

(4) $\forall x \in \bigcup_{t \in T} A_{\underset{\cdot}{\alpha_t}} \Rightarrow \exists t \in T, x \in A_{\underset{\cdot}{\alpha_t}} \Rightarrow \exists t \in T, A(x) > \alpha_t \Rightarrow A(x) > \bigwedge_{t \in T} \alpha_t = \beta \Rightarrow x \in A_{\underset{\cdot}{\beta}}$，所以，$\bigcup_{t \in T} A_{\underset{\cdot}{\alpha_t}} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\beta}}$.

若 L 是稠密的完备格时，

$\forall x \in A_{\underset{\cdot}{\beta}} \Rightarrow A(x) > \beta = \bigwedge_{t \in T} \alpha_t \Rightarrow \exists t \in T, A(x) > \alpha_t > \beta \Rightarrow \exists t \in T, x \in A_{\underset{\cdot}{\alpha_t}} \Rightarrow x \in \bigcup_{t \in T} A_{\underset{\cdot}{\alpha_t}} \Rightarrow A_{\underset{\cdot}{\beta}} \subseteq \bigcup_{t \in T} A_{\underset{\cdot}{\alpha_t}}$，故 $A_{\underset{\cdot}{\beta}} = \bigcup_{t \in T} A_{\underset{\cdot}{\alpha_t}}$.

推论 1.7.1 设 L 是完备格，$A \in F_L(X)$，则：

(1)
$$A_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} A_\alpha \tag{1.120}$$

(2)
$$A_\lambda \supseteq \bigcup_{\alpha > \lambda} A_\alpha \tag{1.121}$$

(3)
$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \tag{1.122}$$

(4)
$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \supseteq \bigcup_{\alpha > \lambda} A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \tag{1.123}$$

若 L 是稠密完备格时，(4) 的等号成立，即

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha > \lambda} A_{\underset{\cdot}{\alpha}}. \tag{1.124}$$

定理 1.7.4(分解定理 1,2) 设 L 是完备格，$A \in F_L(X)$，则：

(1)
$$A = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_\lambda \tag{1.125}$$

(2)
$$A \supseteq \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{1.126}$$

若 L 是稠密完备格时，(2) 的等号成立，即

$$A = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}. \tag{1.127}$$

证明 (1)
$$\left(\bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_\lambda\right)(x) = \bigvee_{\lambda \in L} (\lambda \wedge A_\lambda(x)) = \bigvee_{A(x) \geqslant \lambda} (\lambda \wedge A_\lambda(x))$$
$$= \bigvee_{A(x) \geqslant \lambda} \lambda = A(x).$$

所以
$$A = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_\lambda.$$

(2) $\forall \lambda \in L$，因 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq A_\lambda$，

$A(x) = \bigvee_{\lambda \in L} (\lambda \wedge A_\lambda(x)) \geqslant \bigvee_{\lambda \in L} (\lambda \vee A_{\underset{\cdot}{\lambda}}(x)) = \left(\bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\right)(x)$ 即 $A \supseteq \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

若 L 是稠密的完备格，

$(\bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}})(x) = \bigvee_{\lambda \in L} (\lambda \wedge A_{\underset{\cdot}{\lambda}}(x)) = \bigvee_{\lambda < A(x)} (\lambda \wedge A_{\underset{\cdot}{\lambda}}(x)) = \bigvee_{\lambda < A(x)} \lambda = A(x)$，

所以 $A = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

定理 1.7.5 设 L 是完备格，$A, B \in F_L(X)$，则：

(1)
$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall \lambda \in L, A_\lambda \subseteq B_\lambda \tag{1.128}$$

(2)
$$A = B \Leftrightarrow \forall \lambda \in L, A_\lambda = B_\lambda \tag{1.129}$$

若 L 是稠密的完备格,则

(3) $$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall \lambda \in L, A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq B_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{1.130}$$

(4) $$A = B \Leftrightarrow \forall \lambda \in L, A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = B_{\underset{\cdot}{\lambda}}. \tag{1.131}$$

证明　因为 $A(x) = \bigvee_{\lambda \in L} (\lambda \wedge A_\lambda(x)), B(x) = \bigvee_{\lambda \in L} (\lambda \wedge B_\lambda(x))$,则:

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X, A(x) \leqslant B(x) \Leftrightarrow \forall x \in X, A_\lambda(x) \leqslant B_\lambda(x) \Leftrightarrow A_\lambda \subseteq B_\lambda$.

(2) $A = B \Leftrightarrow \forall x \in X, A(x) = B(x) \Leftrightarrow \forall x \in X, A_\lambda(x) = B_\lambda(x) \Leftrightarrow A_\lambda = B_\lambda$.

(3) 和(4) 的证明类似.

定理1.7.6(分解定理3)　设 L 是稠密的完备格,$A \in F_L(X)$,若映射 $H: L \to P(X)$ 满足:$\forall \lambda \in L, A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda$,则

(1) $$A = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda H(\lambda) \tag{1.132}$$

(2) $$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \Rightarrow H(\lambda_2) \subseteq H(\lambda_1) \tag{1.133}$$

(3) $$A_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) \quad (\lambda \neq 0) \tag{1.134}$$

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha) \quad (\lambda \neq 1). \tag{1.135}$$

证明　(1) $\forall \lambda \in L$,由于 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda$,故 $A = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} \lambda H(\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_\lambda = A$,所以 $A = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda H(\lambda)$.

(2) $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \Rightarrow H(\lambda_2) \subseteq A_{\lambda_2} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda_1}} \subseteq H(\lambda_1)$.

(3) $\lambda \neq 0$ 时,$\forall \alpha < \lambda, H(\alpha) \supseteq A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \supseteq A_\lambda$,由此 $\bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) \supseteq A_\lambda$. 又因为 $\bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} A_\alpha = A_\lambda$,所以 $A_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha)$

另外,$\lambda \neq 1, \forall \alpha > \lambda, A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \supseteq A_\alpha \supseteq H(\alpha)$,则 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \supseteq \bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha)$.

$\forall x \in A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \Rightarrow A(x) > \lambda \Rightarrow \exists \alpha \in L, A(x) > \alpha > \lambda, \Rightarrow \exists \alpha \in L, x \in A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H(\alpha) \Rightarrow x \in \bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha) \Rightarrow A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha)$. 所以 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha)$.

§1.8　L 型模糊集的表现定理

定义 1.8.1　设 X 是论域,L 是完备格,若映射 $H: L \to P(X)$ 满足:

(1) $\forall \lambda, \mu \in L, \lambda \leqslant \mu$,则

$$H(\mu) \subseteq H(\lambda) \tag{1.136}$$

(2) 若 $\{\lambda_t \mid t \in T\} \subseteq L, \lambda = \bigvee_{t \in T} \lambda_t$,则

$$\bigcap_{t \in T} H(\lambda_t) \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) \tag{1.137}$$

则称 H 是 X 上的一个 L 型集合套,X 上的 L 型集合套全体记为 $H_L(X)$.

注:若 L 是稠密的完备格,由式(1.136) 可以推导出式(1.137).

事实上，$\forall x \in \bigcap_{t\in T} H(\lambda_t) \Rightarrow \forall t \in T, x \in H(\lambda_t)$，由于 $\lambda = \bigvee_{t\in T} \lambda_t$，则 $\forall \alpha < \lambda$，$\exists t \in T, \alpha < \lambda_t < \lambda$，则 $\forall \alpha < \lambda, x \in H(\alpha) \Rightarrow x \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$.

所以 $\bigcap_{t\in T} H(\lambda_t) \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$.

定理 1.8.1 设 L 是完备格，$\forall A \in F_L(X)$，令

(1) $\forall \lambda \in L, H(\lambda) = A_\lambda$

(2) $\forall \lambda \in L, H(\lambda) = A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$

则 H 都是 X 上的 L 型集合套.

证明 (1) 显然 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \Rightarrow H(\lambda_2) \subseteq H(\lambda_1)$.

设 $\lambda = \bigvee_{t\in T} \lambda_t, x \in \bigcap_{t\in T} H(\lambda_t) \Rightarrow \forall t \in T, x \in A_{\lambda_t} \Rightarrow \forall t \in T, A(x) \geqslant \lambda_t, \Rightarrow A(x) \geqslant \bigvee_{t\in T} \lambda_t = \lambda \Rightarrow x \in A_\lambda \Rightarrow \forall \alpha < \lambda, x \in A_\alpha = H(\alpha) \Rightarrow x \in \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$.

所以 $\bigcap_{t\in T} H(\lambda_t) \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$.

同理证(2).

定理 1.8.2 设 L 是稠密的完备格，若 $\forall \alpha \in L$，

$$A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H(\alpha) \subseteq A_\alpha$$

则 H 是 X 上的一个 L 型集合套.

证明 若 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$，则

$$H(\lambda_2) \subseteq A_{\lambda_2} \subseteq A_{\lambda_1} \subseteq H(\lambda_1)$$

设 $\lambda = \bigvee_{t\in T} \lambda_t$，则

$$\bigcap_{t\in T} H(\lambda_t) \subseteq \bigcap_{t\in T} A_{\lambda_t} = A_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$$

故 H 是 L 型集合套.

定义 1.8.2 设 L 是完备格，$H_1, H_2 \in H_L(X)$.

(1) 若 $\forall \lambda \in L, H_1(\lambda) \subseteq H_2(\lambda)$，则称 H_2 包含 H_1，记为 $H_1 \subseteq H_2$，

(2) 若 $\forall \lambda \in L, H_1(\lambda) = H_2(\lambda)$，则称 H_1 和 H_2 相等，记为 $H_1 = H_2$.

显然，$(H_L(X), \subseteq)$ 是偏序集.

定义 1.8.3 设 $\{H_t \mid t \in T\} \subseteq H_L(X)$，$\forall \lambda \in L$，定义

$$\left(\bigcap_{t\in T} H_t\right)(\lambda) = \bigcap_{t\in T} H_t(\lambda). \tag{1.138}$$

定理 1.8.3 设 $\{H_t \mid t \in T\} \subseteq H_L(X)$，则 $\bigcap_{t\in T} H_t \in H_L(X)$.

证明 若 $\lambda \leqslant \mu$，则 $\forall t \in T, H_t(\mu) \subseteq H_t(\lambda)$，故 $\bigcap_{t\in T} H_t(\mu) \subseteq \bigcap_{t\in T} H_t(\lambda)$，从而 $\left(\bigcap_{t\in T} H_t\right)(\mu) \subseteq \left(\bigcap_{t\in T} H_t\right)(\lambda)$.

另外，令 $\lambda = \bigvee_{s\in S} \lambda_s$，因为 $H_t \in H_L(X)$，则 $\bigcap_{s\in S} H_t(\lambda_s) \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$.

于是 $\bigcap_{t\in T}\bigcap_{s\in S}H_t(\lambda_s)\subseteq\bigcap_{t\in T}\bigcap_{\alpha<\lambda}H_t(\alpha)$，从而 $\bigcap_{s\in S}\bigcap_{t\in T}H_t(\lambda_s)\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcap_{t\in T}H_t(\alpha)$，即

$$\bigcap_{s\in S}\left(\bigcap_{t\in T}H_t\right)(\lambda_s)\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda}\left(\bigcap_{t\in T}H_t\right)(\alpha)$$

所以 $\bigcap_{t\in T}H_t\in H_L(X)$.

定义 1.8.4　设 $\{H_t\mid t\in T\}\subseteq H_L(X)$，分别称

(1)
$$\bigcap_{t\in T}H_t \tag{1.139}$$

(2)
$$\bigcup_{t\in T}H_t=\bigcap\{H\in H_L(X)\mid \forall t\in T\quad H_t\subseteq H\} \tag{1.140}$$

为 $\{H_t\mid t\in T\}$ 的交和并.

注：由于 $\{H_t\mid t\in T\}$ 通常的并不一定属于 $H_L(X)$，故 $\bigcup_{t\in T}H_t$ 由式(1.140)定义.

代数系统 $(H_L(X),\cap,\cup)$ 在式(1.139)，式(1.140)的定义下是完备格，$H_L(X)$ 的最大元记为 $\overline{X}$，最小元记为 $\overline{\emptyset}$，即 $\forall\lambda\in L$

$$\overline{X}(\lambda)=X,\overline{\emptyset}(\lambda)=\emptyset.$$

定义 1.8.5　设 L 是完备格，$\forall H_1,H_2\in H_L(X)$，在 $H_L(X)$ 中定义关系"～"为：$\forall\lambda\in L$

$$H_1\sim H_2\Leftrightarrow\bigcap_{\alpha<\lambda}H_1(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H_2(\alpha) \tag{1.141}$$

容易验证"～"是 $H_L(X)$ 中的等价关系.

$\forall H\in H_L(X)$，记

$$[H]=\{H_1\in H_L(X)\mid H_1\sim H\} \tag{1.142}$$

$$H_L^*(X)=\{[H]\mid H\in H_L(X)\}. \tag{1.143}$$

定理 1.8.4　设 L 是稠密的完备格，则 $\forall H\in H_L(X)$，有

(1)
$$\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta) \tag{1.144}$$

(2)
$$\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcup_{\beta>\alpha}H(\beta). \tag{1.145}$$

证明　(1) 若 $\beta<\alpha$，$H(\alpha)\subseteq H(\beta)$，则 $H(\alpha)\subseteq\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta)$，从而

$$\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)\subseteq\bigcup_{\alpha>\lambda}\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta).$$

另外，由 L 的稠密性，当 $\alpha>\lambda$ 时，$\exists\mu\in L,\alpha>\mu>\lambda$，则

$$H(\alpha)\subseteq H(\mu)\subseteq H(\lambda),$$

从而　$\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta)\subseteq H(\mu)\subseteq\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)$，故 $\bigcup_{\alpha>\lambda}\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta)\subseteq\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)$.

所以 $\bigcup_{\alpha>\lambda}\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta)=\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)$.

同理证明(2).

定理 1.8.5　设 L 是稠密的完备格，则 $\forall H_1,H_2\in H_L(X)$，$\forall\lambda\in L$ 有

$$H_1\sim H_2\Leftrightarrow\bigcup_{\alpha>\lambda}H_1(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}H_2(\alpha). \tag{1.146}$$

证明 因为 $H_1 \sim H_2 \Leftrightarrow \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} H_1(\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} H_2(\alpha)$ 从而

$$\bigcup_{\alpha>\lambda} H_2(\alpha) = \bigcup_{\alpha>\lambda}\left(\bigcap_{\beta<\alpha} H_2(\beta)\right) = \bigcup_{\alpha>\lambda}\left(\bigcap_{\beta<\alpha} H_1(\beta)\right) = \bigcup_{\alpha>\lambda} H_1(\alpha).$$

反之,设 $\bigcup\limits_{\alpha>\lambda} H_1(\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha>\lambda} H_2(\alpha)$. 从而

$$\bigcap_{\alpha<\lambda} H_2(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda}\left(\bigcup_{\beta>\alpha} H_2(\beta)\right) = \bigcap_{\alpha<\lambda}\left(\bigcup_{\beta>\alpha} H_1(\beta)\right) = \bigcap_{\alpha<\lambda} H_1(\alpha)$$

所以$H_1 \sim H_2$.

定理 1.8.6 设 L 是稠密的完备格, $\forall H \in H_L(X)$,记

$$F_H(\lambda) = \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha), \underset{\cdot}{F}_H(\lambda) = \bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha) \tag{1.147}$$

则(1) F_H 和$\underset{\cdot}{F}_H$ 由$[H]$ 惟一确定,且 $F_H, \underset{\cdot}{F}_H \in H_L(X)$.

(2)
$$\forall H \in [H], \underset{\cdot}{F}_H \subseteq H \subseteq F_H \tag{1.148}$$

(3)
$$\lambda < \mu, \text{则 } F_H(\mu) \subseteq F_H(\lambda) \tag{1.149}$$

(4)
$$\bigcap_{\alpha<\lambda} F_H(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda} \underset{\cdot}{F}_H(\alpha) = F_H(\lambda) \tag{1.150}$$

$$\bigcup_{\alpha>\lambda} F_H(\alpha) = \bigcup_{\alpha>\lambda} \underset{\cdot}{F}_H(\alpha) = \underset{\cdot}{F}_H(\lambda). \tag{1.151}$$

证明 (1) 由等价条件式(1.141),式(1.146) 知, F_H 和$\underset{\cdot}{F}_H$ 被$[H]$ 惟一确定.

$\forall \lambda, \mu \in L$,若 $\lambda < \mu$,则 $H(\mu) \subseteq H(\lambda)$,从而

$$F_H(\mu) = \bigcap_{\alpha<\mu} H(\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha) = F_H(\lambda), \underset{\cdot}{F}_H(\mu) = \bigcup_{\alpha>\mu} H(\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha) = \underset{\cdot}{F}_H(\lambda).$$

设$\{\lambda_t \mid t \in T\} \subseteq L$,且 $\lambda = \bigvee\limits_{t\in T} \lambda_t$,则

$$\bigcap_{t\in T} F_H(\lambda_t) = \bigcap_{t\in T}\bigcap_{\beta<\lambda_t} H(\beta) = \bigcap\{H(\beta) \mid \forall t \in T, \beta < \lambda_t\} \subseteq \{H(\beta) \mid \beta < \bigvee_{t\in T} \lambda_t\}$$
$$= \bigcap\{H(\beta) \mid \beta < \lambda\} = \bigcap_{\beta<\lambda} H(\beta) = F_H(\lambda) \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} F_H(\alpha)$$

所以 $F_H \in H_L(X)$.

由于 $\forall \alpha > \lambda, H(\alpha) \subseteq H(\lambda)$,则$\underset{\cdot}{F}_H(\lambda) = \bigcup\limits_{\alpha>\lambda} H(\alpha) \subseteq H(\lambda)$,从而

$$\bigcap_{t\in T} \underset{\cdot}{F}_H(\lambda_t) \subseteq \bigcap_{t\in T} H(\lambda_t) \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcup_{\beta>\alpha} H(\beta) = \bigcap_{\alpha<\lambda} \underset{\cdot}{F}_H(\alpha)$$

所以$\underset{\cdot}{F}_H \in H_L(X)$.

(2) 上面已证 $\forall \lambda \in L, \underset{\cdot}{F}_H(\lambda) \subseteq H(\lambda)$,故$\underset{\cdot}{F}_H \subseteq H$. 因为 $\forall \alpha < \lambda, H(\lambda) \subseteq H(\alpha)$,故 $H(\lambda) \subseteq \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} H(\alpha) = F_H(\lambda)$,故 $H \subseteq F_H$,所以 $\underset{\cdot}{F}_H \subseteq H \subseteq F_H$.

(3) 若 $\lambda < \mu$,由于 L 是稠密格, $\exists \alpha \in L, \lambda < \alpha < \mu$,则 $H(\mu) \subseteq H(\alpha) \subseteq H(\lambda)$,从而

$$F_H(\mu) = \bigcap_{\beta<\mu} H(\beta) \subseteq H(\alpha) \subseteq \bigcup_{\beta>\lambda} H(\beta) = F_H(\lambda).$$

(4) $\forall \lambda \in L$

$$\bigcap_{\alpha<\lambda} F_H(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcup_{\beta>\alpha} H(\beta) = \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha) = F_H(\lambda)$$

$$\bigcap_{\alpha<\lambda} F_H(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcap_{\beta<\alpha} H(\beta) = \bigcap_{\beta<\lambda} H(\beta) = F_H(\lambda)$$

所以
$$\bigcap_{\alpha<\lambda} F_H(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda} F_H(\alpha) = F_H(\lambda)$$

同理证
$$\bigcup_{\alpha>\lambda} F_H(\alpha) = \bigcup_{\alpha>\lambda} F_H(\alpha) = F_H(\lambda).$$

为了定义等价类的运算,现证明并、交运算与代表无关.

定理 1.8.7　设 L 是稠密的完备格,$H_t, H_t^* \in H_L(X)(t \in T)$,且 $\forall t \in T, H_t \sim H_t^*$,则

(1)
$$\bigcap_{t\in T} H_t \sim \bigcap_{t\in T} H_t^* \tag{1.152}$$

(2)
$$\bigcup_{t\in T} H_t \sim \bigcup_{t\in T} H_t^*. \tag{1.153}$$

证明　(1) 由于 $\forall t \in T \quad \bigcap_{\alpha<\lambda} H_t(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda} H_t^*(\alpha)$,则

$$\bigcap_{\alpha<\lambda}\left(\bigcap_{t\in T} H_t\right)(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcap_{t\in T} H_t(\alpha) = \bigcap_{t\in T}\bigcap_{\alpha<\lambda} H_t(\alpha) = \bigcap_{t\in T}\bigcap_{\alpha<\lambda} H_t^*(\alpha)$$
$$= \bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcap_{t\in T} H_t^*(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda}\left(\bigcap_{t\in T} H_t^*\right)(\alpha),$$

所以
$$\bigcap_{t\in T} H_t \sim \bigcap_{t\in T} H_t^*.$$

(2) 由于 $\forall t \in T, \bigcup_{\alpha>\lambda} H_t = \bigcup_{\alpha>\lambda} H_t^*$,则

$$\bigcup_{\alpha>\lambda}\left(\bigcup_{t\in T} H_t\right)(\alpha) = \bigcup_{\alpha>\lambda}\bigcup_{t\in T} H_t(\alpha) = \bigcup_{t\in T}\bigcup_{\alpha>\lambda} H_t(\alpha) = \bigcup_{t\in T}\bigcup_{\alpha>\lambda} H_t^*(\alpha)$$
$$= \bigcup_{\alpha>\lambda}\bigcup_{t\in T} H_t^*(\alpha) = \bigcup_{\alpha>\lambda}\left(\bigcup_{t\in T} H_t^*\right)(\alpha)$$

所以
$$\bigcup_{t\in T} H_t \sim \bigcup_{t\in T} H_t^*.$$

定义 1.8.6　设 L 是稠密的完备格

(1) $\forall [H_1], [H_2] \in H_L^*(X)$,若 $\forall H_1 \in [H_1], H_2 \in [H_2], H_1 \subseteq H_2$,则称 $[H_2]$ 包含 $[H_1]$,记为 $[H_1] \subseteq [H_2]$.

(2) 若 $\{[H_t] \mid t \in T\} \subseteq H_L^*(X)$,记

$$\bigcap_{t\in T}[H_t] = \left[\bigcap_{t\in T} H_t\right] \tag{1.154}$$

$$\bigcup_{t\in T}[H_t] = \left[\bigcup_{t\in T} H_t\right] \tag{1.155}$$

分别称为集合套类 $\{[H_t] \mid t \in T\}$ 的交和并.

由于集合套类的运算是由集合套的并、交运算定义的,所以,L 是稠密的完备格时,$(H_L^*(X), \cap, \cup)$ 是完备格.

定理 1.8.8(表现定理)　设 L 是稠密的完备格,令 $f: H_L^*(X) \to F_L(X)$,

$\forall [H] \in H_L^*(X)$

$$f([H]) = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda H(\lambda) \tag{1.156}$$

则 f 是 $H_L^*(X)$ 到 $F_L(X)$ 的双射，且 $\forall \lambda \in L$

$$(f([H]))_\lambda = F_H(\lambda) \tag{1.157}$$

$$(f([H]))_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \underset{\cdot}{F}_H(\lambda). \tag{1.158}$$

证明 先证 f 是映射.

$\forall [H] \in H_L^*(X)$，因 $\underset{\cdot}{F}_H(\lambda) \subseteq H(\lambda) \subseteq F_H(\lambda)$，则

$$\bigcup_{\lambda \in L} \lambda \underset{\cdot}{F}_H(\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} \lambda H(\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} \lambda F_H(\lambda)$$

由于 L 是稠密的，$\forall \lambda \in L - \{0\}$，$\exists \alpha \in L, 0 < \alpha < \lambda$，且 $F_H(\lambda) \subseteq \underset{\cdot}{F}_H(\alpha)$，则

$$\bigcup_{\lambda \in L} \lambda F_H(\lambda) = \bigcup_{\lambda \in L-\{0\}} \lambda F_H(\lambda) \subseteq \bigcup_{\alpha \in L} \alpha \underset{\cdot}{F}_H(\alpha)$$

所以 $\bigcup_{\lambda \in L} \lambda F_H(\lambda) = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda \underset{\cdot}{F}_H(\lambda) = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda H(\lambda)$.

由于 $F_H, \underset{\cdot}{F}_H$，被 $[H]$ 惟一确定，从而

$$f([H]) = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda H(\lambda)$$

是惟一的，即 f 是映射. 现证 $(f([H]))_\lambda = F_H(\lambda)$，$(f([H]))_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \underset{\cdot}{F}_H(\lambda)$.

$\forall x \in F_H(\lambda)$，由 $f([H]) = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda F_H(\lambda)$ 知，

$$f([H])(x) = \bigvee_{\alpha \in L} \alpha \wedge F_H(\alpha)(x) \geqslant \lambda \wedge F_H(\lambda)(x) = \lambda,$$

则 $x \in (f([H]))_\lambda$，即 $F_H(x) \subseteq f([H])_\lambda$.

反之，$\forall x \in (f([H]))_\lambda$，即 $(f([H]))(x) \geqslant \lambda$.

而 $(f([H]))(x) = \bigvee_{\lambda \in L} \lambda \wedge F_H(\lambda)(x) = \bigvee_{\lambda \in L} \{\lambda \mid x \in F_H(\lambda)\} \triangleq \alpha \geqslant \lambda$

则 $\exists \{\lambda_t \mid t \in T\}$，使 $\bigvee_{t \in T} \lambda_t = \alpha$，且 $x \in F_H(\lambda_t)(\forall t \in T)$.

故 $x \in \bigcap_{t \in T} F_H(\lambda_t) \subseteq \bigcap_{\lambda < \alpha} F_H(\lambda) = F_H(\alpha) \subseteq F_H(\lambda)$，由此 $(f([H]))_\lambda \subseteq F_H(\lambda)$.

所以 $(f([H]))_\lambda = F_H(\lambda)$.

同理 $(f([H]))_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \underset{\cdot}{F}_H(\lambda)$.

最后证 f 是双射.

设 $[H_1], [H_2] \in H_L^*(X)$，若 $f([H_1]) = f([H_2])$ 则

$$F_{H_1}(\lambda) = (f([H_1]))_\lambda = (f([H_2]))_\lambda = F_{H_2}(\lambda)$$

即 $\bigcap_{\alpha < \lambda} H_1(\alpha) = \bigcap_{\alpha < \lambda} H_2(\alpha)$，故 $H_1 \sim H_2$，所以 $[H_1] = [H_2]$，即 f 是单射.

$\forall A \in F_L(X)$，令 $H_A: L \to P(X)$ 为 $\forall \lambda \in L$，

$$H_A(\lambda) = A_\lambda.$$

则 $H_A \in H_L(X)$，故 $\exists [H_A] \in H_L^*(X)$，使

$$f([H_A]) = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda H_A(\lambda) = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_\lambda = A$$

于是 f 是满射，所以 f 是双射.

定理 1.8.9 设 L 是稠密的完备格，则代数系统 $(H_L^*(X), \cap, \cup)$ 和 $(F_L(X), \cap, \cup)$ 同构.

证明 由定理 1.8.8 知，$f: H_L^*(t) \to F_L(X)$，$f([H]) = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda H(\lambda)$ 是双射. 现证 f 是同态映射.

设 $\{[H_t] \mid t \in T]\} \subseteq H_L^*(X)$，记

$$f(H_t) = A_t, f(H) = \bigcap_{t \in T} A_t$$

则

$$F_H(\lambda) = (f(H))_\lambda = (\bigcap_{t \in T} A_t)_\lambda = \bigcap_{t \in T} (A_t)_\lambda = \bigcap_{t \in T} (f(H_t))_\lambda$$
$$= \bigcap_{t \in T} F_{H_t}(\lambda) = (\bigcap_{t \in T} F_{H_t})(\lambda)$$

即 $F_H = \bigcap_{t \in T} F_{H_t}$

由此 $f\left(\bigcap_{t \in T} H_t\right) = f\left(\bigcap_{t \in T} F_{H_t}\right) = f(F_H) = f(H) = \bigcap_{t \in T} A_t = \bigcap_{t \in T} f(H_t)$，

所以 $f(\bigcap_{t \in T} [H_t]) = f([\bigcap_{t \in T} H_t]) = f(\bigcap_{t \in T} H_t) = \bigcap_{t \in T} f(H_t) = \bigcap_{t \in T} f([H_t])$.

现证 $f(\bigcup_{t \in T} [H_t]) = \bigcup_{t \in T} f([H_t])$.

$\forall t \in T, H_t \subseteq \bigcup_{t \in T} H_t$，则 $[H_t] \subseteq [\bigcup_{t \in T} H_t] = \bigcup_{t \in T} [H_t]$，故 $f([H_t]) \subseteq f(\bigcup_{t \in T} [H_t])$，所以 $\bigcup_{t \in T} f([H_t]) \subseteq f\left(\bigcup_{t \in T} [H_t]\right)$.

反之，由于 f 是满射，$\exists [H] \in H_L^*(X)$，使

$$f([H]) = \bigcup_{t \in T} f([H_t])$$

于是

$$f(\bigcup_{t \in T} [H_t]) = f(\cap \{[H] \mid \forall t \in T, [H_t] \subseteq [H]\})$$
$$= \cap \{f([H]) \mid \forall t \in T, [H_t] \subseteq [H]\}$$

因为 $\forall t \in T, [H_t] \subseteq [H]$，则 $\bigcup_{t \in T} [H_t] \subseteq [H]$，从而 $f\left(\bigcup_{t \in T} [H_t]\right) \subseteq f([H]) = \bigcup_{t \in T} f([H_t])$.

所以 $f\left(\bigcup_{t \in T} [H_t]\right) = \bigcup_{t \in T} f([H_t])$.

即 $(H_L^*(X), \cap, \cup) \cong (F_L(X), \cap, \cup)$.

推论 1.8.1 设 L 是稠密的完备格，$\forall H \in H_L(X)$

$$f(H) = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda H(\lambda)$$

则 f 是 $H_L(X)$ 到 $F_L(X)$ 的满同态映射，且

(1)
$$(f(H))_{\lambda} \subseteq H(\lambda) \subseteq (f(H))_\lambda \tag{1.159}$$

(2) $$(f(H))_{\lambda} = \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha) = F_H(\lambda) \quad (1.160)$$

$$(f(H))_{\lambda} = \bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha) = F_H(\lambda). \quad (1.161)$$

§1.9 L 型模糊集的模系运算

设$(L, \leqslant)$是偏序集,并设 L 有惟一的最大元 1 和最小元 0.

若映射 $\triangle: L\times L\to L$ 满足:

(1) $$\triangle(0,0) = 0, \triangle(1,1) = 1 \quad (1.162)$$

(2) $$\triangle(a,b) = \triangle(b,a) \quad (1.163)$$

(3) $$a \leqslant c, b \leqslant d, \text{则 } \triangle(a,b) \leqslant \triangle(c,d) \quad (1.164)$$

(4) $$\triangle(\triangle(a,b),c) = \triangle(a,\triangle(b,c)) \quad (1.165)$$

则称 $\triangle$ 为 L 中的一个三角模.

若 $\forall a\in L, \triangle(a,1) = a$,则称 $\triangle$ 为 T 模,记为 T;

若 $\forall a\in L, \triangle(a,0) = a$,则称 $\triangle$ 为 S 模,记为 S.

若映射 $N: L\to L$ 满足:

(1) $$\forall a,b\in L, a\leqslant b, \text{则 } N(b)\leqslant N(a) \quad (1.166)$$

(2) $$\forall a\in L, N(N(a)) = a \quad (1.167)$$

则称 N 为 L 中的伪补.

定理 1.9.1 L 上的 T 模和 S 模满足两极律,即 $\forall a\in L$,

$$T(a,0) = 0, S(a,1) = 1 \quad (1.168)$$

证明 由于 $T(a,1) = a$,则 $T(0,1) = 0$, 又由单调性知,

$$0 = T(0,0) \leqslant T(0,a) \leqslant T(0,1) = 0$$

故 $T(a,0) = T(0,a) = 0$

同理证 $S(a,1) = 1$.

设 N 是 L 中的伪补,T 和 S 是 L 中的 T 模和 S 模,若满足:$\forall a,b\in L$

$$N(T(a,b)) = S(N(a),N(b)) \quad (1.169)$$

$$N(S(a,b)) = T(N(a),N(b)) \quad (1.170)$$

则称 T 和 S 关于 N 相互对偶,简称为对偶.

定义 1.9.1 设$(L, \leqslant)$是偏序集,T、S 是 L 中的 T 模和 S 模,N 为 L 中的伪补,若 T,S 关于 N 对偶,则称(L,S,T,N)为 L 型模系.

(1) 若满足:$\forall a\in L$

$$T(a,a) = a, S(a,a) = a \quad (1.171)$$

则称为幂等模系.

(2) 若满足：$\forall a,b \in L$

$$T(a,S(a,b)) = a \tag{1.172}$$

$$S(a,T(a,b)) = a \tag{1.173}$$

则称为吸收模系.

(3) 若满足：$\forall a,b,c \in L$

$$T(a,S(b,c)) = S(T(a,b),T(a,c)) \tag{1.174}$$

$$S(a,T(b,c)) = T(S(a,b),S(a,c)) \tag{1.175}$$

则称为分配模系.

定理1.9.2 设$(L,\leqslant)$是偏序集，则L上的分配模系是吸收模系，吸收模系是幂等模系.

证明 若L是分配模系，则$\forall a,b \in L$

$$T(a,S(a,b)) = T(S(a,0),S(a,b)) = S(a,T(0,b)) = S(a,0) = a$$

$$S(a,T(a,b)) = S(T(a,1),T(a,b)) = T(a,S(1,b)) = T(a,1) = a$$

所以L是吸收模系.

设L是吸收模系，则$\forall a \in L$,

$$T(a,a) = T(a,S(a,0)) = a, S(a,a) = S(a,T(a,1)) = a$$

所以L是幂等模系.

定理1.9.3 设$(L,\leqslant)$是偏序集，若L是幂等模系，则$\forall a,b \in L$

$$a \leqslant b \Leftrightarrow T(a,b) = a \Leftrightarrow S(a,b) = b \tag{1.176}$$

证明 若$a \leqslant b$，则$a = T(a,a) \leqslant T(a,b) \leqslant T(a,1) = a$，故$T(a,b) = a$.

反之，若$T(a,b) = a$，则

$$a = T(a,b) \leqslant T(1,b) = b，故 a \leqslant b$$

同理证 $a \leqslant b \Leftrightarrow S(a,b) = b$.

定理1.9.4 设L是格，则(L,S,T,N)是吸收模系的充分必要条件L是幂等模系，且

$$T(a,b) = a \wedge b, \quad S(a,b) = a \vee b$$

证明 吸收模系是幂等模系已证.

设L是幂等模系. 由于

$$T(a,b) \leqslant T(a,1) = a, T(a,b) \leqslant T(1,b) = b,$$

则$T(a,b) \leqslant a \wedge b$. 又因为$T(a,a) = a$，则$a \wedge b = T(a \wedge b, a \wedge b) \leqslant T(a,b)$故$T(a,b) = a \wedge b$.

同理证 $S(a,b) = a \vee b$.

由于L关于$\vee$，$\wedge$满足吸收律，则L关于S,T满足吸收律，所以L是吸收模系.

推论 1.9.1 设L是格,若$(L,\wedge,\vee)$不是分配格,则L中不存在分配模系.

证明 若L中存在分配模系(L,S,T,N),则L是吸收模系和幂等模系,在幂等模系中,$S=\vee$,$T=\wedge$,所以$(L,\wedge,\vee)$是分配模系,与假设矛盾,故L中不存在分配模系.

推论 1.9.2 设L是格,模系(L,S,T,N)是分配模系等价于L是吸收模系,等价于L是幂等模系,等价于L中的格运算$\vee=S$, $\wedge=T$.

设$L=[0,1]$,由于$(L,\vee,\wedge)$满足幂等律,吸收律,分配律,则L中不再存在其他满足分配律,吸收律和幂等律的模系.

定义 1.9.2 设(L,S,T,N)是模系,在$F_L(X)$中定义运算$\uplus$和$\Cap$为$\forall A,B\in F_L(X)$,

(1) $$(A\uplus B)(x)=S(A(x),B(x)) \tag{1.177}$$

(2) $$(A\Cap B)(x)=T(A(x),B(x)) \tag{1.178}$$

(3) $$A'(x)=N(A(x)) \tag{1.179}$$

则称$A\uplus B$为A和B的S并,$A\Cap B$为A和B的T交,A'为A的伪补.

定理 1.9.5 若(L,S,T,N)是模系,则$(F_L(X)\ \uplus,\Cap,')$是模系.

证明 由于运算$\uplus$, $\Cap$是由S,T定义的,所以它们满足模系中的相应性质.

现证"$'$"是伪补和有对偶律.

若$A\subseteq B$,则$\forall x\in X,A(x)\leqslant B(x)$,由此

$$B'(x)=N(B(x))\leqslant N(A(x))=A'(x)$$

即$B'\subseteq A'$,所以"$'$"是逆序映射

$$(A')'(x)=N(A'(x))=N(N(A(x))=A(x)$$

即$(A')'=A$,所以"$'$"是对合对应.由此"$'$"是$F_L(X)$中的伪补.

最后证明对偶律.$\forall A,B\in F_L(X),x\in X$.

$$\begin{aligned}(A\Cap B)'(x)&=N((A\Cap B)(x)))=N(T(A(x),B(x)))\\&=S(N(A(x)),N(B(x))=S(A'(x),B'(x)))=(A'\uplus B')(x)\end{aligned}$$

即$(A\Cap B)'=A'\uplus B'$.

同理证 $(A\uplus B)'=A'\Cap B'$.所以$(F_L(X),\Cap,\uplus,')$是模系.

定理 1.9.6 若(L,S,T,N)是分配(吸收,幂等)模系,则$(F_L(X),\uplus,\Cap,')$也是分配(吸收,幂等)模系.

容易验证,从略.

设L是完备格,(L,S,T,N)是模系,若$a_n\in L(n\in\mathbf{N})$,由于S和T满足结合律,记

$$\mathop{S}_{i=1}^{n+1}a_i=S((\mathop{S}_{i=1}^{n}a_i),a_{n+1}) \tag{1.180}$$

$$\overset{n+1}{\underset{i=1}{T}} a_i = T((\overset{n}{\underset{i=1}{T}} a_i), a_{n+1}) \tag{1.181}$$

令 $S_n = \overset{n}{\underset{i=1}{S}} a_i, T_n = \overset{n}{\underset{i=1}{T}} a_i (n \geqslant 2)$

显然
$$a_1 = S_1 \leqslant S_2 \leqslant \cdots \tag{1.182}$$
$$a_1 = T_1 \geqslant T_2 \geqslant \cdots \tag{1.183}$$

定义

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} S_n \tag{1.184}$$
$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{T}} a_n = \bigwedge_{n=1}^{\infty} T_n \tag{1.185}$$

定理 1.9.7　设 L 是完备格，(L,S,T,N) 是模系，则

(1) 若 $\exists a_n \in L, a_n = 1$，则 $\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n = 1$，若 $\exists a_n \in L, a_n = 0$，则 $\overset{\infty}{\underset{n=1}{T}} a_n = 0$.

(2) 若 $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\} = \{a_n' \mid n \in \mathbf{N}\}$，则 $\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n' = \overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n, \overset{\infty}{\underset{n=1}{T}} a_n' = \overset{\infty}{\underset{n=1}{T}} a_n$

(3)
$$N(\overset{\infty}{\underset{n=1}{T}} a_n) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} N(a_n) \tag{1.186}$$
$$N(\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{T}} N(a_n). \tag{1.187}$$

证明　(1) 因为 $a_n = 1$，则 $S_n = 1$，故 $\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} S_n = 1$.

同理，若 $a_n = 0$，则 $\overset{\infty}{\underset{n=1}{T}} a_n = 0$.

(2) 令 $S_n' = \overset{n}{\underset{i=1}{T}} a_n'$，则 $\forall n \in \mathbf{N}, \exists m_n \in \mathbf{N}$，使 $\{a_1', a_2', \cdots, a_n'\} \subseteq \{a_{m_1}, a_{m_2}, \cdots, a_{m_n}\}$

于是 $S_n' \leqslant S_n$，则有

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n' = \bigvee_{n=1}^{\infty} S_n' \leqslant \bigvee_{n=1}^{\infty} S_n = \overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n$$

同理证明　$\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n \leqslant \overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n'$.

所以 $\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n = \overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n'$.

(3) 由于 N 是 L 中的伪补，则

$$N(\overset{\infty}{\underset{n=1}{T}} a_n) = N(\bigwedge_{n=1}^{\infty} T_n) = \bigvee_{n=1}^{\infty} N(T_n) = \bigvee_{n=1}^{\infty} N(\overset{n}{\underset{i=1}{T}} a_i) = \bigvee_{n=1}^{\infty} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} N(a_i)$$
$$= \bigvee_{n=1}^{\infty} S_n(N(a_n)) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} N(a_n).$$

同理证明　$N(\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{T}} N(a_n)$

设 L 是完备格，(L,S,T,N) 是模系，$\{a_t \mid t \in T\} \subseteq L$，记

$$\underset{t \in T}{S} a_t = \vee \{S(a_{t_1}, \cdots, a_{t_n}) \mid t_i \in T, 1 \leqslant i \leqslant n, n \in \mathbf{N}\} \quad (1.188)$$

$$\underset{t \in T}{T} a_t = \wedge \{T(a_{t_1}, \cdots, a_{t_n}) \mid t_i \in T, 1 \leqslant i \leqslant n, n \in \mathbf{N}\} \quad (1.189)$$

设$\{A_t \mid t \in T\} \subseteq F_L(X)$，记

$$(\dot{\bigcup_{t \in T}} A_t)(x) = \underset{t \in T}{S} A_t(x) \quad (1.190)$$

$$(\dot{\bigcap_{t \in T}} A_t)(x) = \underset{t \in T}{T} A_t(x) \quad (1.191)$$

分别称为$\{A_t \mid t \in T\}$的无限S并和无限T交.

定理 1.9.8 设L是完备格，(L,S,T,N)是模系，$\{A_t \mid t \in T\} \subseteq F_L(X)$，则有$\forall \lambda \in L$，

(1) $$(\dot{\bigcup_{t \in T}} A_t)_\lambda \supseteq \bigcup_{t \in T} (A_t)_\lambda \quad (1.192)$$

(2) $$(\dot{\bigcup_{t \in T}} A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \supseteq \bigcup_{t \in T} (A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \quad (1.193)$$

(3) $$(\dot{\bigcap_{t \in T}} A_t)_\lambda \subseteq \bigcap_{t \in T} (A_t)_\lambda \quad (1.194)$$

(4) $$(\dot{\bigcap_{t \in T}} A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcap_{t \in T} (A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \quad (1.195)$$

证明 只证(1)、(3).

(1) $\forall x \in \bigcup_{t \in T} (A_t)_\lambda \Rightarrow \exists t_0 \in T, x \in (A_{t_0})_\lambda \Rightarrow \exists t_0 \in T, A_{t_0}(x) \geqslant \lambda$，所以$\forall t_1 \in T, S(A_{t_0}(x), A_{t_1}(x)) \geqslant A_{t_0}(x) \geqslant \lambda$，而

$$(\dot{\bigcup_{t \in T}} A_t)(x) = \underset{t \in T}{S} A_t(x) = \vee \{S(A_{t_1}(x), \cdots, A_{t_n}(x)) \mid t_i \in T, i \leqslant n\} \geqslant \lambda$$

故 $x \in (\dot{\bigcup_{t \in T}} A_t)_\lambda$，所以，$\bigcup_{t \in T} (A_t)_\lambda \subseteq (\dot{\bigcup_{t \in T}} A_t)_\lambda$.

(3) $\forall x \in (\dot{\bigcap_{t \in T}} A_t)_\lambda \Rightarrow (\dot{\bigcap_{t \in T}} A_t)(x) \geqslant \lambda \Rightarrow \underset{t \in T}{T} A_t(x) \geqslant \lambda \Rightarrow \wedge \{T(A_{t_1}(x), \cdots, A_{t_n}(x)) \mid t_i \in T, 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \lambda \Rightarrow \forall t_i \in T, A_{t_i}(x) \geqslant \lambda, \Rightarrow \forall t_i \in T, x \in (A_{t_i})_\lambda \Rightarrow x \in \bigcap_{t \in T} (A_t)_\lambda$.

所以$(\dot{\bigcap_{t \in T}} A_t)_\lambda \subseteq \bigcap_{t \in T} (A_t)_\lambda$

定理 1.9.9 设L是完备格，(L,S,T,N)是模系，若$\{\alpha_t \mid t \in T\} \subseteq L$，$\alpha = \vee \{\alpha_t \mid t \in T\}$，$\beta = \wedge \{\alpha_t \mid t \in T\}$，$\forall A \in F_L(X)$，则：

(1) $$A_\alpha \subseteq \bigcap_{t \in T} A\alpha_t \quad (1.196)$$

(2) $$A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq \bigcap_{t \in T} A\alpha_t \quad (1.197)$$

(3) $$A_\beta \supseteq \bigcup_{t \in T} A\alpha_t \quad (1.198)$$

(4) $$A_{\underset{\cdot}{\beta}} \supseteq \bigcup_{t \in T} A\alpha_t. \quad (1.199)$$

证明 只证(1)、(3).

(1) $\forall x \in A_\alpha \Rightarrow A(x) \geqslant \alpha \geqslant \alpha_t (t \in T) \Rightarrow \forall t \in T, x \in A\alpha_t \Rightarrow x \in \bigcap_{t \in T} A\alpha_t$ 故

$$A_\alpha \subseteq \bigcap_{t \in T} A\alpha_t.$$

(3) $\forall x \in \bigcup_{t \in T} A\alpha_t \Rightarrow \exists t \in T, x \in A\alpha_t \Rightarrow A(x) \geq \alpha_t \geq \beta \Rightarrow x \in A_\beta$,故

$$A_\beta \supseteq \bigcup_{t \in T} A\alpha_t.$$

定理 1.9.10(分解定理) 设 L 是完备格,(L,S,T,N) 是模系,$\forall A \in F_L(X)$,有 $\forall x \in X$

$$A(x) = \bigvee_{\lambda \in L} T(\lambda, A_\lambda(x)) \tag{1.200}$$

其中 $A_\lambda(x)$ 是 A_λ 的特征函数.

证明 $\bigvee_{\lambda \in L} T(\lambda, A_\lambda(x)) = \bigvee_{A(x) \geq \lambda} T(\lambda, A_\lambda(x)) = \bigvee_{A(x) \geq \lambda} \lambda = A(x)$. 所以

$$A(x) = \bigvee_{\lambda \in L} T(\lambda, A_\lambda(x)).$$

§1.10 模糊关系

定义 1.10.1 设 X, Y 是论域,笛卡儿积 $X \times Y$ 的一个模糊子集称为 X 到 Y 的一个模糊关系,简称为 F 关系,记为 R,即 $R \in F(X \times Y)$.

特别地,$X = Y$,则 F 关系 R 称为 X 中的 F 关系,即 $R \in F(X \times X)$.

例 1.10.1 实数域 $\mathbf{R}$ 上的 x 远远小于 y 的 F 关系 R 为

$$R(x,y) = \begin{cases} 0, & x \geq y \\ \left[1 + \dfrac{100}{(y-x)^2}\right]^{-1}, & x < y \end{cases}$$

特别地,若 X 和 Y 为有限论域,则 X 到 Y 的一个 F 关系可以记为一个矩阵 $\boldsymbol{R}$.

例 1.10.2 设身高论域 $X = \{140,150,160,170,180\}$,单位是厘米. 体重论域 $Y = \{40,50,60,70,80\}$,单位是公斤. 身高和体重之间接近标准体重的模糊关系可以写为一个表,如表 1.1 所示,从而可以记为一个模糊矩阵.

表 1.1

身高 \ 体重	40	50	60	70	80
140	1	0.8	0.5	0.2	0
150	0.8	1	0.8	0.5	0.2
160	0.5	0.8	1	0.8	0.5
170	0.2	0.5	0.8	1	0.8
180	0	0.2	0.5	0.8	1

写成矩阵形式

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}$$

定义 1.10.2 设 X 和 Y 是有限论域，则称 X 到 Y 的一个模糊关系 R 为一个模糊矩阵. 简称 F 矩阵，即

$$R:X \times Y \to [0,1] \tag{1.201}$$

若 $x = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$Y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$，则 $\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{m \times n}$ 是 m 行 n 列矩阵，且 $\forall 1 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant j \leqslant n$，

$$r_{ij} = R(x_i, y_j)$$

显然，$0 \leqslant r_{ij} \leqslant 1$，$r_{ij}$ 表示 x_i 和 y_j 关于 R 的关系程度.

定义 1.10.3 设 $R,S \in (X \times Y)$，定义：

(1) $R \subseteq S$ 当且仅当 $\forall (x,y) \in X \times Y$，

$$R(x,y) \leqslant S(x,y) \tag{1.202}$$

(2) $R = S$ 当且仅当 $\forall (x,y) \in X \times Y$，

$$R(x,y) = S(x,y) \tag{1.203}$$

定义 1.10.4 设 $R,S \in F(X \times Y)$，定义：

(1) $$(R \cup S)(x,y) = R(x,y) \vee S(x,y) \tag{1.204}$$

(2) $$(R \cap S)(x,y) = R(x,y) \wedge S(x,y) \tag{1.205}$$

(3) $$R'(x,y) = 1 - R(x,y) \tag{1.206}$$

分别称为 R 和 S 的并关系、交关系和 R 的余关系.

一般地，$\{R_t \mid t \in T\} \subseteq F(X \times Y)$，则定义

$$(\bigcup_{t \in T} R_t)(x,y) = \bigvee_{t \in T} R_t(x,y) \tag{1.207}$$

$$(\bigcup_{t \in T} R_t)(x,y) = \bigwedge_{t \in T} R_t(x,y) \tag{1.208}$$

容易验证 $(F(X \times Y), \vee, \wedge, ')$ 是软代数系统.

定义 1.10.5 设 $R \in F(X \times Y)$，$\forall (x,y) \in X \times Y$，记

$$R^{-1}(y,x) = R(x,y) \tag{1.209}$$

则称 R^{-1} 为 R 的逆关系，或称为转置关系.

定理 1.10.1 设 $R,S \in F(X \times Y)$，则：

(1) $$R \subseteq S \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1} \tag{1.210}$$

(2) $$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1} \tag{1.211}$$

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \tag{1.212}$$

(3) $$(R')^{-1} = (R^{-1})' \tag{1.213}$$

(4) $$(R^{-1})^{-1} = R \tag{1.214}$$

一般地，$\{R_t \mid t \in T\} \subseteq F(X \times Y)$.

(5) $$(\bigcup_{t \in T} R_t)^{-1} = \bigcup_{t \in T} R_t^{-1} \tag{1.215}$$

(6) $$(\bigcap_{t \in T} R_t)^{-1} = \bigcap_{t \in T} R_t^{-1} \tag{1.216}$$

证明　只证(2)，其他显然.

(2) $$(R \cup S)^{-1}(y,x) = (R \cup S)(x,y) = R(x,y) \vee S(x,y) = R^{-1}(y,x) \vee S^{-1}(y,x) = (R^{-1} \cup S^{-1})(y,x).$$

故$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.

同理证　$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

特别地，$\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{m \times n}$，$\boldsymbol{S} = (s_{ij})_{m \times n}$ 是模糊矩阵，则

(1) $$\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{S} \Leftrightarrow \forall\ i,j, r_{ij} \leqslant s_{ij} \tag{1.217}$$

(2) $$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{S} \Leftrightarrow \forall\ i,j, r_{ij} = s_{ij} \tag{1.218}$$

(3) $$\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{S} = (r_{ij} \vee S_{ij})_{m \times n} \tag{1.219}$$

(4) $$\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S} = (r_{ij} \wedge S_{ij})_{m \times n} \tag{1.220}$$

(5) $$\boldsymbol{R}' = (1 - r_{ij})_{m \times n} \tag{1.221}$$

(6) $$\boldsymbol{R}^{-1} = (r_{ji}^{*})_{n \times m} \tag{1.222}$$

其中 $r_{ji}^{*} = r_{ij}$

例 1.10.3　设　$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$，则

(1) $\boldsymbol{R} \not\subseteq \boldsymbol{S}, \boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{R}$.　　(2) $\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$.

(3) $\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$.　　(4) $\boldsymbol{R}' = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.9 & 0.3 \end{pmatrix}$.

(5) $\boldsymbol{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$.

定义 1.10.6　设 $R \in F(X \times Y)$，$\forall \lambda \in [0,1]$，记

(1) $$R_\lambda = \{(x,y) \in X \times Y \mid R(x,y) \geqslant \lambda\} \tag{1.223}$$

(2) $$R_{\dot{\lambda}} = \{(x,y) \in X \times Y \mid R(x,y) > \lambda\} \tag{1.224}$$

则称 R_λ 为 R 的 λ 截集，称 $R_{\dot{\lambda}}$ 为 R 的 λ 强截集.

定理 1.10.2(分解定理)　设 $R \in F(X \times Y)$，则：

(1) $$R = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda R_\lambda \tag{1.225}$$

(2)
$$R = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda R_{\lambda} \tag{1.226}$$

(3)
$$R = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H_R(\lambda) \tag{1.227}$$

其中 $H_R:[0,1] \to P(X \times Y)$,且 $\forall \lambda \in [0,1], R_{\lambda} \subseteq H(\lambda) \subseteq R_{\lambda}$.

定义 1.10.7 设 $R \in F(X \times Y), S \in F(Y \times Z)$,定义一个 X 到 Z 的 F 关系 $R \circ S$ 为 $\forall x \in X, z \in Z$,

$$(R \circ S)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge S(y,z)) \tag{1.228}$$

则称 $R \circ S$ 为 R 和 S 的合成关系,或称为 R 和 S 的乘积.

定理 1.10.3 设 $R, R_1, R_2 \in F(X \times Y), S, S_1, S_2 \in F(Y \times Z), Q \in F(Z \times W)$,则:

(1)
$$(R \circ S) \circ Q = R \circ (S \circ Q) \tag{1.229}$$

(2)
$$R \circ (S_1 \cup S_2) = R \circ S_1 \cup R \circ S_2 \tag{1.230}$$

$$(R_1 \cup R_2) \circ S = R_1 \circ S \cup R_2 \circ S \tag{1.231}$$

(3)
$$(R_1 \cap R_2) \circ S \subseteq R_1 \circ S \cap R_2 \circ S \tag{1.232}$$

$$R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq R \circ S_1 \cap R \circ S_2 \tag{1.233}$$

(4)
$$\text{若 } R_1 \subseteq R_2, \text{则 } R_1 \circ S \subseteq R_2 \circ S \tag{1.234}$$

$$\text{若 } S_1 \subseteq S_2, \text{则 } R \circ S_1 \subseteq R \circ S_2 \tag{1.235}$$

(5)
$$R \circ I_Y = I_X \circ R = R \tag{1.236}$$

$$R \circ O_Y = O_X \circ R = O \tag{1.237}$$

(6)
$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} \tag{1.238}$$

一般地,$R \in F(X \times Y), \{R_t \mid t \in T\} \subseteq F(X \times Y), S \in F(Y \times Z), \{S_t \mid t \in T\} \subseteq F(Y \times Z)$,则

(7)
$$R \circ (\bigcup_{t \in T} S_t) = \bigcup_{t \in T} R \circ S_t \tag{1.239}$$

(8)
$$(\bigcup_{t \in T} R_t) \circ S = \bigcup_{t \in T} R_t \circ S \tag{1.240}$$

其中,$\forall x, y \in X$,

$$I_X(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

$$O_X(x,y) = 0.$$

证明 只证(1)、(2)、(6).

(1) $\forall (x,w) \in X \times W$

$$\begin{aligned} ((R \circ S) \circ Q)(x,w) &= \bigvee_{z \in Z} ((R \circ S)(x,z) \wedge Q(z,w)) \\ &= \bigvee_{z \in Z} ((\bigvee_{y \in Y} R(x,y) \wedge S(y,z))) \wedge Q(z,w)) \\ &= \bigvee_{z \in Z} \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge S(y,z) \wedge Q(z,w)) \end{aligned}$$

$$= \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge (\bigvee_{z \in Z} (S(y,z) \wedge Q(z,w))))$$
$$= \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge (S \circ Q)(y,w))$$
$$= R \circ (S \circ Q)(x,w)$$

所以 $$(R \circ S) \circ Q = R \circ (S \circ Q).$$

(2) $\forall (x,z) \in X \times Z$,

$$(R \circ (S_1 \cup S_2))(x,z) = \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge (S_1 \cup S_2)(y,z))$$
$$= \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge (S_1(y,z) \vee S_2(y,z)))$$
$$= \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge (S_1(y,z))) \vee (R(x,y) \wedge S_2(y,z))$$
$$= (\bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge (S_1(y,z))) \vee (\bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge S_2(y,z))$$
$$= (R \circ S_1)(x,z) \vee (R \circ S_2)(x,z)$$
$$= ((R \circ S_1) \cup (R \circ S_2))(x,z)$$

所以 $R \circ (S_1 \cup S_2) = R \circ S_1 \cup R \circ S_2$

同理证 $$(R_1 \cup R_2) \circ S = R_1 \circ S \cup R_2 \circ S.$$

(6) $\forall (x,z) \in X \times Z$

$$(R \circ S)^{-1}(z,x) = (R \circ S)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} R(x,y) \wedge S(y,z)$$
$$= \bigvee_{y \in Y} S^{-1}(z,y) \wedge R^{-1}(y,x) = (S^{-1} \circ R^{-1})(z,x)$$

所以 $$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

特别地,$R = (r_{ij})_{m \times l}$,$S = (s_{ij})_{l \times n}$ 是模糊矩阵,则

$$R \circ S = (t_{ij})_{m \times n} = T \tag{1.241}$$

其中 $t_{ij} = \bigvee_{k=1} (r_{ik} \wedge s_{kj})$.

例 1.10.4 设 $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$$

一般地,$\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R}$.

例 1.10.5 设 $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$,则

$$(\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S}) \circ \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

从而 $$(\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S}) \circ \boldsymbol{Q} \neq (\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{Q}) \cap (\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{Q}).$$

定义 1.10.8 设 $R \in F(X \times X)$，记

$$R^0 = I_X, R^1 = R, R^2 = R \circ R, \cdots, R^n = R^{n-1} \circ R, \cdots$$

则称 R^n 为 R 的 n 次幂.

定理 1.10.4 设 $R, S \in F(X \times X)$，则.

(1) 若 $R \subseteq S$，则 $\forall n \in \mathbf{N}, R^n \subseteq S^n$

(2)
$$R^k \circ R^l = R^{k+l} \tag{1.242}$$

(3) 若 $R \circ S = S \circ R$，则 $(R \circ S)^n = R^n \circ S^n$

(4)
$$(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n \tag{1.243}$$

证明 (1)、(2)、(4) 由定理 1.10.3 直接可得.

(3) 由归纳法得 $(R \circ S)^1 = R^1 \circ S^1$，设 $(R \circ S)^{k-1} = R^{k-1} \circ S^{k-1}$，则

$$\begin{aligned}(R \circ S)^k &= (R \circ S)^{k-1} \circ (R \circ S) = R^{k-1} \circ S^{k-1} \circ R \circ S \\ &= R^{k-1} \circ S^{k-1} \circ S \circ R = R^{k-1} \circ S^k \circ R = R^{k-1} \circ R \circ S^k = R^k \circ S^k\end{aligned}$$

一般地，$(R \circ S)^n \neq R^n \circ S^n$.

例 1.10.6 设 $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.5 & 0.8 \end{pmatrix}$，则

$$(\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S})^2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}^2 \circ \boldsymbol{S}^2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.5 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

所以 $(\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S})^2 \neq \boldsymbol{R}^2 \circ \boldsymbol{S}^2$.

§1.11 模糊关系的性质

定义 1.11.1 设 $R \in F(X \times X)$.

(1) 若 $\forall x \in X, R(x,x) = 1$，即 $I_X \subseteq R$，则称 R 是 X 上的 F 自反关系.

(2) 若 $\forall x, y \in X, R(x,y) = R(y,x)$，即 $R^{-1} = R$，则称 R 是 X 上的 F 对称关系.

(3) 若 $R \circ R \subseteq R$，则称 R 是 X 上的 F 传递关系.

定理 1.11.1 设 $\{R_t \mid t \in T\} \subseteq F(X \times X)$，则:

(1) 若 $\forall t \in T, R_t$ 是 F 自反关系，则 $\bigcup_{t \in T} R_t, \bigcap_{t \in T} R_t$ 是 F 自反关系.

(2) 若 $\forall t \in T, R_t$ 是 F 对称关系，则 $\bigcup_{t \in T} R_t, \bigcap_{t \in T} R_t$ 是 F 对称关系.

(3) 若 $\forall t \in T, R_t$ 是 F 传递关系，则 $\bigcap_{t \in T} R_t$ 是 F 传递关系.

证明 (1) 因 $\forall t \in T, R_t$ 是 F 自反，则 $\forall t \in T, I_X \subseteq R_t$，从而

$$I_X \subseteq \bigcup_{t\in T} R_t, I_X \subseteq \bigcap_{t\in T} R_t.$$

所以 $\bigcup_{t\in T} R_t$, $\bigcap_{t\in T} R_t$ 是 F 自反关系.

(2) 因 $\forall t \in T, R_t$ 是 F 对称的,则 $\forall t \in T, R_t^{-1} = R_t$,从而

$$(\bigcup_{t\in T} R_t)^{-1} = \bigcup_{t\in T} R_t^{-1} = \bigcup_{t\in T} R_t, (\bigcap_{t\in T} R_t)^{-1} = \bigcap_{t\in T} R_t^{-1} = \bigcap_{t\in T} R_t$$

所以 $\bigcup_{t\in T} R_t$, $\bigcap_{t\in T} R_t$ 是 F 对称关系.

(3) 因 $\forall t \in T$

$$(\bigcap_{t\in T} R_t)^2 = (\bigcap_{t\in T} R_t)\circ(\bigcap_{t\in T} R_t) \subseteq R_t \circ R_t \subseteq R_t$$

从而$(\bigcap_{t\in T} R_t)^2 \subseteq \bigcap_{t\in T} R_t$,所以 $\bigcap_{t\in T} R_t$ 是 F 传递关系.

一般情况下,若 R,S 是 X 上的 F 传递关系,但 $R\cup S$ 不一定是 X 上的 F 传递关系.

例 1.11.1　设 $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}$

因 $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}^2 = \boldsymbol{S}$,故 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 是传递关系,但是

$$\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S})^2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix},$$

即$(\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S})^2 \not\subseteq \boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S}$,所以 $\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S}$ 不是传递关系.

定理 1.11.2　设 $R \in F(X\times X)$,若 R 是 F 自反关系,则 $R^n \subseteq R^{n+1}$.

证明　因为

$R^2(x,y) = \bigvee_{z\in X}(R(x,z)\wedge R(z,y)) \geqslant R(x,x)\wedge R(x,y) = R(x,y)$, 即 $R \subseteq R^2$

由此　$R^2 = R\circ R \subseteq R^2\circ R = R^3, \cdots$,从而,$R^n = R^{n-1}\circ R \subseteq R^n\circ R = R^{n+1}$. 所以

$$R^n \subseteq R^{n+1}.$$

定理 1.11.3　设 $R,S \in F(X\times X)$,若 R,S 是 F 自反关系,则 $R\circ S$ 是 F 自反关系.

证明　因为

$$(R\circ S)(x,y) = \bigvee_{z\in X}(R(x,z)\wedge S(z,y)) \geqslant R(x,y)\wedge S(y,y) = R(x,y)$$

即 $R \subseteq R\circ S$ 从而,$I_X \subseteq R \subseteq R\circ S$,所以 $R\circ S$ 是 F 自反的.

推论 1.11.1　若 $\mathbf{R}$ 是 X 上的 F 自反关系,则 $\mathbf{R}^n$ 也是 X 上的 F 自反关系.

定理 1.11.4　设 $R,S \in F(X\times X)$,若 R 和 S 是 F 对称关系,则

$$R\circ S \text{ 是 } F \text{ 对称} \Leftrightarrow R\circ S = S\circ R$$

证明　设 $R\circ S$ 是 F 对称,则　$R\circ S = (R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1} = S\circ R$

反之,设 $R\circ S = S\circ R$,则$(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1} = S\circ R = R\circ S$,

所以 $R\circ S$ 是 F 对称关系.

推论 1.11.2 若 R 是 X 上的 F 对称关系,则 $R\circ R^{-1}$ 也是 X 上的 F 对称关系.

推论 1.11.3 若 R 是 X 上的 F 对称关系,则 R^n 也是 X 上的 F 对称关系.

定理 1.11.5 设 $R,S\in F(X\times X)$ 是 X 上 F 传递关系,且 $R\circ S=S\circ R$,则 $R\circ S$ 是 X 上的 F 传递关系.

证明 因为

$$(R\circ S)^2=(R\circ S)\circ(R\circ S)=R\circ R\circ S\circ S=R^2\circ S^2\subseteq R\circ S,$$

故 $R\circ S$ 是 X 上的 F 传递关系.

推论 1.11.4 若 R 是 X 上的 F 传递关系,则 R^n 也是 X 上的 F 传递关系.

定义 1.11.2 设 $R\in F(X\times X)$,记

$$t(R)=\cap\{S\in F(X\times X)\mid R\subseteq S,\text{且 } S^2\subseteq S\}\tag{1.244}$$

则称 $t(R)$ 是 F 关系 R 的传递闭包.

显然,$t(R)$ 是 X 上包含 R 的最小的 F 传递关系.

定理 1.11.6 设 $R\in F(X\times X)$,则

$$t(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n.\tag{1.245}$$

证明 因为 $R\subseteq t(R)$,则 $R^n\subseteq(t(R))^n$,由于 $t(R)$ 是 F 传递的,即 $(t(R))^2\subseteq t(R)$,从而 $(t(R))^n\subseteq(t(R))^{n-1}\subseteq\cdots\subseteq t(R)$,于是 $\forall n\in\mathbf{N},R^n\subseteq t(R)$,所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n\subseteq t(R)$.

反之,因为

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n\right)\circ\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}R^m\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}(R^n\circ R^m)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}R^{n+m}=\bigcup_{k=2}^{\infty}\bigcup_{n+m=k}R^k\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}R^k$$

所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n$ 是 F 传递关系,

又因为 $R\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n$,且 $t(R)$ 是包含 R 的最小传递关系,所以 $t(R)\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n$

由此 $t(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n$.

定理 1.11.7 设 $R\in F(X\times X)$,则:

(1) 若 $R\subseteq S$,则 $t(R)\subseteq t(S)$.

(2) 若 R 是 F 自反关系,则 $t(R)$ 是 F 自反关系.

(3) 若 R 是 F 对称关系,则 $t(R)$ 是 F 对称关系.

(4) 若 R 是 F 传递关系,则 $t(R)=R$.

(5)
$$(t(R))^{-1}=t(R^{-1}).\tag{1.246}$$

证明 (1) 由于 $R \subseteq S$,则 $R^n \subseteq S^n$,故 $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n = t(S)$,即

$$t(R) \subseteq t(S).$$

(2) 因为 R 是 F 自反,则 R^n 是 F 自反,所以 $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是 F 自反.

(3) 因为 R 是 F 对称,则 R^n 是 F 对称,所以 $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是 F 对称.

(4) 由于 $t(R)$ 是包含 R 的最小传递关系,而 R 是 F 传递的,故 $t(R) = R$.

(5) $(t(R))^{-1} = (\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^{-1})^n = t(R^{-1})$.

定理 1.11.8 设 $R \in F(X \times X)$,则:

(1) $R \cup I_X$ 是 X 上的 F 自反关系,是包含 R 的最小 F 自反关系.

(2) $R \cup R^{-1}$ 是 X 上的 F 对称关系,是包含 R 的最小 F 对称关系.

证明 (1) 因为 $I_X \subseteq R \cup I_X$,故 $R \cup I_X$ 是 F 自反关系.

设 S 是包含 R 的自反关系,则 $R \subseteq S$,从而 $R \cup I_X \subseteq S \cup I_X = S$,所以 $R \cup I_X$ 是包含 R 的最小的 F 自反关系.

(2) 因为 $(R \cup R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup R = R \cup R^{-1}$,故 $R \cup R^{-1}$ 是 F 对称关系.

设 S 是包含 R 的 F 对称关系,则 $R \subseteq S$,故 $R^{-1} \subseteq S^{-1}$,从而 $R \cup R^{-1} \subseteq S \cup S^{-1} = S$,所以 $R \cup R^{-1}$ 是包含 R 的最小 F 对称关系.

定义 1.11.3 设 $R \in F(X \times X)$,则:

(1) 称 $R \cup I_X$ 为 R 的 F 自反闭包,记为 $r(R)$.

(2) 称 $R \cup R^{-1}$ 为 R 的 F 对称闭包,记为 $S(R)$. 即

$$r(R) = R \cup I_X \tag{1.247}$$

$$S(R) = R \cup R^{-1}. \tag{1.248}$$

定义 1.11.4 设 $R \in F(X \times X)$,若 R 是 F 自反,F 对称关系,则称 R 是 X 上的 F 相似关系.

定理 1.11.9 (1) 若 $\forall t \in T, R_t$ 是 X 上的 F 相似关系,则 $\bigcup_{t \in T} R_t$, $\bigcap_{t \in T} R_t$ 是 X 上的 F 相似关系.

(2) 若 R 是 X 上的 F 相似关系,则 R^n 是 X 上的 F 相似关系.

由定理 1.11.1,推论 1.11.1 和推论 1.11.3 直接可得:

定理 1.11.10 设 $R \in F(X \times X)$,则 $R \cup R^{-1} \cup I_X$ 是 X 上的 F 相似关系,且它是包含 R 的最小 F 相似关系.

证明显然,从略.

定义 1.11.5 设 $R \in F(X \times X)$,则称

$$a(R) = R \cup R^{-1} \cup I_X \tag{1.249}$$

是 X 上 R 的 F 相似闭包.

定理 1.11.11 设 $R \in F(X \times X)$,则 $\forall \lambda \in [0,1]$,

(1) R 是 X 上的 F 自反关系的充分必要条件是 R_λ 是 X 上的普通自反关系;

(2) R 是 X 上的 F 对称关系的充分必要条件是 R_λ 是 X 上的普通对称关系;

(3) R 是 X 上的 F 相似关系的充分必要条件是 R_λ 是 X 上的普通相似关系.

证明 设 R 是 F 自反,F 对称,即 R 是 F 相似.

$\forall \lambda \in [0,1]$,因为 $\forall x \in X, R(x,x) = 1 \geqslant \lambda$,故 $(x,x) \in R_\lambda$,所以 R_λ 是普通自反关系.

若 $(x,y) \in R_\lambda$,则 $R(y,x) = R(x,y) \geqslant \lambda$,从而 $(y,x) \in R_\lambda$,所以 R_λ 是普通对称关系.

由此 R_λ 是普通相似关系.

反之,设 R_λ 是自反,对称,即相似,则由 F 关系的分解定理

$$R = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda R_\lambda$$

$$R(x,x) = \Big(\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda R_\lambda\Big)(x,x) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda \wedge R_\lambda(x,x) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda = 1$$

故 R 是 F 自反关系.

$$\begin{aligned} R(x,y) &= \Big(\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda R_\lambda\Big)(x,y) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda \wedge R_\lambda(x,y) \\ &= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda \wedge R_\lambda(y,x) = R(y,x) \end{aligned}$$

故 R 是 F 的对称关系,从而 R 是 F 的相似关系.

§1.12 模糊等价关系

定义 1.12.1 设 $R \in F(X \times X)$,若 R 是 F 自反、F 对称和 F 传递关系,则称 R 是 X 上的模糊等价关系,简称 F 等价关系.

定理 1.12.1 (1) 若 $\forall t \in T, R_t$ 是 X 上的 F 等价关系,则 $\bigcap_{t \in T} R_t$ 是 X 上的 F 等价关系.

(2) 若 $\mathbf{R}$ 是 X 上的 F 等价关系,则 $\mathbf{R}^n$ 是 X 上的 F 等价关系.

由定理 1.11.1,推论 1.11.1,推论 1.11.3 和推论 1.11.4 直接可得:

定理 1.12.2 设 $R \in F(X \times X)$,则

$$t(S(R)) \cup I_X \tag{1.250}$$

是 X 上的 F 等价关系,它是包含 R 的最小等价关系.

其中,$S(R) = R \cup R^{-1}$.

证明 显然 $t(S(R)) \cup I_X$ 是 F 自反关系.

由于 $S(R) = R \cup R^{-1}$ 对称,由定理 1.11.7 知,$t(S(R))$ 是 F 对称,所以

$t(S(R))\cup I_X$ 也是 F 对称.

现证传递性

$$(t(S(R))\cup I_X)\circ(t(S(R))\cup I_X)$$
$$=t(S(R))\circ t(S(R))\cup t(S(R))\circ I_X\cup I_X\circ t(S(R))\cup I_X^2$$
$$=t(S(R))\cup I_X$$

所以 $t(S(R))\cup I_X$ 是 F 传递关系. 从而 $t(S(R))\cup I_X$ 是 F 等价关系.

设 Q 是包含 R 的 F 等价关系,则由 Q 是 F 自反知,$Q\supseteq I_X$;由 Q 是 F 对称知,$Q\supseteq R\cup R^{-1}=S(R)$;由 Q 是 F 传递知,$Q=t(Q)\supseteq t(S(R))$,从而

$$Q\supseteq t(S(R))\cup I_x.$$

所以 $t(S(R))\cup I_X$ 是包含 R 的最小 F 等价关系.

定义 1.12.2 设 $R\in F(X\times X)$,则称

$$t(S(R))\cup I_X$$

为 X 上 R 的 F 等价闭包,记为 $e(R)$.

定理 1.12.3 设 R 是 X 上的 F 相似关系,则 $t(R)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}R^n$ 是 X 上的 F 等价关系,且 $e(R)=t(R)$.

证明 由定理1.11.7知,$t(R)$ 是 F 自反,F 对称,又因为 $t(R)$ 是 F 传递的,所以 $t(R)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}R^n$ 是 F 等价关系.

由于 R 是 F 自反和 F 对称,则 $I_X\subseteq R,s(R)=R$,由此

$$e(R)=t(S(R))\cup I_X=t(R)\cup I_X$$
$$=(\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n)\cup I_X=\bigcup_{n=1}^{\infty}(R^n\cup I_X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n=t(R).$$

定义 1.12.3 设 R 是 X 上的 F 等价关系,$\forall x\in X$,令 $[x]\in F(X)$,使得 $\forall y\in X$,

$$[x](y)=R(x,y)\tag{1.251}$$

记

$$X/R=\{[x]\mid x\in X\}\tag{1.252}$$

则称 X/R 为由 R 决定的 F 商集.

定理 1.12.4 设 R 是 X 上的 F 等价关系,则 X/R 满足:

(1) $\forall x,y\in X,R(x,y)=0\Leftrightarrow[x]\cap[y]=\emptyset$;

(2) $\forall x,y\in X,R(x,y)=1\Leftrightarrow[x]=[y]$;

(3) $\bigcup\limits_{x\in X}[x]=X$.

证明 (1) 若 $R(x,y)=0$,则 $\forall z\in X$,

$$([x]\cap[y])(z)=[x](z)\wedge[y](z)=R(x,z)\wedge R(y,z)$$

$$= R(x,z) \wedge R(z,y) \leqslant \bigvee_{z \in X} (R(x,z) \wedge R(z,y)$$
$$= R \circ R(x,y) \leqslant R(x,y) = 0$$

故$[x] \cap [y] = \emptyset$

若$[x] \cap [y] = \emptyset$,则

$R(x,y) = R(x,y) \wedge R(y,y) = [x](y) \wedge [y](y) = ([x] \cap [y])(y) = 0$,
即$R(x,y) = 0$.

(2) 若$R(x,y) = 1$,则$\forall z \in X$,

$$[x](z) = R(x,z) = R(x,z) \wedge R(x,y) = R(y,x) \wedge R(x,z)$$
$$\leqslant \bigvee_{x \in X} R(y,x) \wedge R(x,z) = R \circ R(y,z) \leqslant R(y,z)$$
$$= [y](z)$$

即 $[x] \subseteq [y]$.同理证$[y] \subseteq [x]$,故$[x] = [y]$.

若$[x] = [y]$,则

$$R(x,y) = [x](y) = [y](y) = R(y,y) = 1.$$

(3) $\forall y \in X$,有

$$(\bigcup_{x \in X} [x])(y) = \bigvee_{x \in X} [x](y) \geqslant [y](y) = R(y,y) = 1$$

故 $\bigcup_{x \in X} [x] = X$.

定理 1.12.5 设$R \in F(X \times X)$,则R是X上F等价关系的充分必要条件是$\forall \lambda \in [0,1]$,$R_\lambda$是$X$上的普通等价关系.

证明 由定理1.11.11知R是F相似关系的充分必要条件是R_λ是普通相似关系.

现证R是F传递的充分必要条件是R_λ是普通传递.

必要性,

设$R \circ R \subseteq R$,设$(x,y) \in R_\lambda$,$(y,z) \in R_\lambda$,则$R(x,y) \geqslant \lambda$,$R(y,z) \geqslant \lambda$,于是$R(x,y) \wedge R(y,z) \geqslant \lambda$,故$\bigvee_{y \in X} (R(x,y) \wedge R(y,z)) = R \circ R(x,z) \geqslant \lambda$,从而$R(x,z) \geqslant \lambda$ 由此,$(x,z) \in R_\lambda$,所以R_λ是普通传递关系.

充分性

已知R_λ是普通传递关系,即$\forall (x,y) \in R_\lambda$,$(y,z) \in R_\lambda$,则$(x,z) \in R_\lambda$,故$R(x,y) \geqslant \lambda$,$R(y,z) \geqslant \lambda$,则$R(x,z) \geqslant \lambda$. $\forall y \in X$,令

$$\mu = R(x,y) \wedge R(y,z)$$

则$R(x,y) \geqslant \mu$,$R(y,z) \geqslant \mu$,由此,$R(x,z) \geqslant \mu = R(x,y) \wedge R(y,z)$

从而 $R(x,z) \geqslant \bigvee_{y \in X} (R(x,y) \wedge R(y,z)) = R \circ R(x,z)$

即,$R \circ R \subseteq R$.故,R是F传递关系.

所以R是F等价关系的充分必要条件是R_λ是普通等价关系.

§1.13 模糊矩阵与模糊分类

定义 1.13.1 设 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$ 是一个 F 矩阵.

(1) 若 $\forall i,j,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n$,有

$$r_{ij}=0 \tag{1.253}$$

则称 $\boldsymbol{R}$ 是 F 零矩阵,记为 $\boldsymbol{0}$.

(2) 若 $\forall i,j,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n$,有

$$r_{ij}=1 \tag{1.254}$$

则称 $\boldsymbol{R}$ 是 F 全矩阵,记为 $\boldsymbol{E}$.

(3) 若 $m=n,\forall i,j,1\leqslant i,j\leqslant m$,有

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{1.255}$$

则称 $\boldsymbol{R}$ 是 F 单位矩阵,记为 $\boldsymbol{I}$.

定义 1.13.2 设 F 矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{S}=(s_{ij})_{m\times n}$,定义 F 矩阵

(1) $$\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S}=(r_{ij}+s_{ij})_{m\times n} \tag{1.256}$$

(2) $$\lambda\boldsymbol{R}=(\lambda r_{ij})_{m\times n},\quad \lambda\in[0,1] \tag{1.257}$$

称 $\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的和,$\lambda\boldsymbol{R}$ 为数 λ 与 $\boldsymbol{R}$ 的乘积.

其中 $r_{ij}+s_{ij}\geqslant 1$ 时,令 $r_{ij}+s_{ij}=1$.

定义 1.13.3 设 F 矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times l},\boldsymbol{S}=(s_{ij})_{l\times n}$,定义 F 矩阵

$$\boldsymbol{T}=(t_{ij})_{m\times n}=\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S} \tag{1.258}$$

其中

$$t_{ij}=\bigvee_{k=1}^{l}(r_{ik}\wedge s_{kj}) \tag{1.259}$$

称 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的乘积,即关系 R 和 S 的合成.

定理 1.13.1 F 矩阵的加法,数乘法和乘法满足下列性质:$\forall\boldsymbol{R},\boldsymbol{S},\boldsymbol{T},\boldsymbol{Q}$ 是 F 矩阵

(1) $$\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{R} \tag{1.260}$$

(2) $$(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S})+\boldsymbol{T}=\boldsymbol{R}+(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}) \tag{1.261}$$

(3) $$\boldsymbol{R}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{R} \tag{1.262}$$

(4) $$\boldsymbol{I}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R} \tag{1.263}$$

(5) $$\alpha(\beta\boldsymbol{R})=(\alpha\beta)\boldsymbol{R}\qquad(\alpha,\beta\in[0,1]) \tag{1.264}$$

(6) $$(\alpha+\beta)\boldsymbol{R}=\alpha\boldsymbol{R}+\beta\boldsymbol{R}\qquad(\alpha,\beta\in[0,1]) \tag{1.265}$$

(7) $$\alpha(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S})=\alpha\boldsymbol{R}+\alpha\boldsymbol{S}\qquad(\alpha\in[0,1]) \tag{1.266}$$

(8) $$(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})\circ\boldsymbol{T}=\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{T}) \tag{1.267}$$

(9) $$R \circ (S + T) = R \circ S + R \circ T \quad (1.268)$$

$$(S + T) \circ Q = S \circ Q + T \circ Q \quad (1.269)$$

(10) $$(\alpha R) \circ S = R \circ (\alpha S) = \alpha(R \circ S) \quad (\alpha \in [0,1]) \quad (1.270)$$

(11) $$I \circ R = R \circ I = R \quad (1.271)$$

证明 (8) 是定理 1.10.3 中(1) 的特例,只证(9),其他显然.

(9) 设 $R = (r_{ij})_{m\times l}, S = (s_{ij})_{l\times n}, T = (t_{ij})_{l\times n}$

因为 $S + T$ 的第 j 列为$(s_{1j} + t_{1j}, s_{2j} + t_{2j}, \cdots, s_{lj} + t_{lj})^{\mathrm{T}}$

故 $R \circ (S + T)$ 的第 i 行,第 j 列元素为

$$\bigvee_{k=1}^{l} (r_{ik} \wedge (s_{kj} + t_{kj})) = \bigvee_{k=1}^{l} (r_{ik} \wedge s_{kj} + r_{ik} \wedge t_{kj}) = \bigvee_{k=1}^{l} (r_{ik} \wedge s_{kj}) + \bigvee_{k=1}^{l} (r_{ik} \wedge t_{kj})$$

上式等于 $R \circ S + R \circ T$ 的第 i 行,第 j 列元素. 所以 $R \circ (S + T) = R \circ S + R \circ T$.

同理证$(S + T) \circ Q = S \circ Q + T \circ Q$.

定义 1.13.4 设 $R = (r_{ij})_{m\times n}$ 是一个 F 矩阵,定义矩阵

$$R^{\mathrm{T}} = (r_{ij}^{*})_{n\times m} \quad (1.272)$$

其中 $$r_{ij}^{*} = r_{ji}$$

则称 R^{T} 为 R 的转置矩阵,即为 R 的逆关系.

定理 1.13.2 设 R, S 为 F 矩阵,则

(1) $$(R^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = R \quad (1.273)$$

(2) $$(R + S)^{\mathrm{T}} = R^{\mathrm{T}} + S^{\mathrm{T}} \quad (1.274)$$

(3) $$(R \circ S)^{\mathrm{T}} = S^{T} \circ R^{\mathrm{T}} \quad (1.275)$$

(4) $$(\alpha R)^{\mathrm{T}} = \alpha R^{\mathrm{T}} \quad (\alpha \in [0,1]) \quad (1.276)$$

证明 (1) 是定理1.10.1 中(4) 的特例,(3) 是定理1.10.3 中(6) 的特例. (2) 和(4) 证明简单,从略.

设 R 是 n 阶 F 矩阵,记

$$R^0 = I, R^1 = R, \cdots, R^k = R^{k-1} \circ R,$$

则 $\forall m, l \in \mathbf{N}$,有

$$R^m \circ R^l = R^{m+l}, (R^m)^l = R^{ml} \quad (1.277)$$

定义 1.13.5 设 R 是 n 阶 F 矩阵.

(1) 若 $R^2 = R$,则称 R 为幂等矩阵;

(2) 若存在 $m \in \mathbf{N}, R^m = 0$,则称 R 为幂零矩阵;

(3) 若 $R \subseteq R^2$,则称 R 为紧矩阵;

(4) 若 R 满足:$r_{ii} \geqslant r_{ij} (i,j = 1,2,\cdots,n)$,则称 R 为对角占优矩阵.

显然,(1)n 阶 F 矩阵 R 是幂零的,则 $R^n = \mathbf{0}$,

(2) 若 F 矩阵 R 是幂等的,则 $k > 2$ 时,$R^k = R$;

(3) 若 F 矩阵 $\boldsymbol{R}$ 是紧的，则 $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{R}^2 \subseteq \cdots$；

(4) 若 F 矩阵 $\boldsymbol{R}$ 是对角占优的，则 $\boldsymbol{R}$ 是紧的，从而 $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{R}^2 \subseteq \cdots$.

定理 1.13.3 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 矩阵，则存在正整数 k,d 使得

$$\boldsymbol{R}^{k+d} = \boldsymbol{R}^k \tag{1.278}$$

证明 考虑 $\boldsymbol{R}$ 的幂序列

$$\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^2,\cdots,\boldsymbol{R}^m,\cdots$$

由 F 矩阵乘法的定义知，$\boldsymbol{R}^2$ 中每个元素一定是与 $\boldsymbol{R}$ 中某一确定的元素相同，设 $\boldsymbol{R}$ 中互不相同的元素有 S 个，则 $\boldsymbol{R}$ 看做 $S \cdot n^2$ 个数的一个排列. $\boldsymbol{R}^2$ 也如此，继而 $\forall m \in \mathbf{N}$，$\boldsymbol{R}^m$ 也是如此，而这样的排列只有有限个互不相同，于是一定存在 d 和 k 使 $\boldsymbol{R}^k = \boldsymbol{R}^{k+d}$.

定义 1.13.6 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 矩阵.

(1) 称

$$\min\{k \mid \boldsymbol{R}^{k+d} = \boldsymbol{R}^k, d \in \mathbf{N}\} \tag{1.279}$$

为 $\boldsymbol{R}$ 的指数.

(2) 称

$$\min\{d \mid \boldsymbol{R}^{k+d} = \boldsymbol{R}^k, k \in \mathbf{N}\} \tag{1.280}$$

为 $\boldsymbol{R}$ 的周期.

(3) 若 $\boldsymbol{R}$ 的周期为 1，即存在 $k \in \mathbf{N}$ 使

$$\boldsymbol{R}^{k+1} = \boldsymbol{R}^k \tag{1.281}$$

则称 $\boldsymbol{R}$ 幂收敛于 $\boldsymbol{R}^k$，简称 $\boldsymbol{R}$ 是幂收敛.

定理 1.13.4 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 矩阵，若 $\boldsymbol{R}$ 是紧的($\boldsymbol{R}^2 \supseteq \boldsymbol{R}$)或 $\boldsymbol{R}$ 是传递的($\boldsymbol{R}^2 \subseteq \boldsymbol{R}$)，则 $\boldsymbol{R}$ 是幂收敛的.

证明 若 $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{R}^2$，则有 $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{R}^2 \subseteq \cdots$，
由定理 1.13.3 知，$\exists k,d \in \mathbf{N}$，使 $\boldsymbol{R}^{k+d} = \boldsymbol{R}^k$，则 $\boldsymbol{R}^k \subseteq \boldsymbol{R}^{k+1} \subseteq \cdots \subseteq \boldsymbol{R}^{k+d} = \boldsymbol{R}^k$
故 $\boldsymbol{R}^{k+1} = \boldsymbol{R}^k$，即 $\boldsymbol{R}$ 是幂等的.

$\boldsymbol{R}^2 \subseteq \boldsymbol{R}$ 的情况同理可证.

推论 1.13.1 设 R 是 n 阶对角占优矩阵，则 R 是幂收敛矩阵.

定理 1.13.5 设 R 是 n 阶 F 矩阵，则 $k > n$ 时

$$R^k \subseteq \bigcup_{m=1}^{n} R^m \tag{1.282}$$

证明 记 $R^k = (r_{ij}^{(k)})_{m \times n}$，我们有

$$r_{ij}^{(2)} = \bigvee_{j_1=1}^{n} (r_{ij_1} \wedge r_{j_1 j})$$

$$r_{ij}^{(3)} = \bigvee_{j_1=1}^{n} (r_{ij_1} \wedge r_{j_1 j}^{(2)}) = \bigvee_{j_1=1}^{n} (r_{ij_1} \wedge \bigvee_{j_2=1}^{n} (r_{j_1 j_2} \wedge r_{j_2 j}) = \bigvee_{j_1=1}^{n} \bigvee_{j_2=1}^{n} (r_{ij_1} \wedge r_{j_1 j_2} \wedge r_{j_2 j})$$

一般地

$$r_{ij}^{(k)}=\bigvee_{j_1=1}^{n}\cdots\bigvee_{j_{k-1}=1}^{n}(r_{ij_1}\wedge r_{j_1j_2}\wedge\cdots\wedge r_{j_{k-1}j})$$

当 $k>n$ 时,上面 k 个脚码,$j_1,\cdots,j_{k-1},j$ 中必有重复的情况,不妨设 $j_l=j_s$,则略去

$$r_{j_lj_{l+1}}\wedge r_{j_{l+1}j_{l+2}}\wedge\cdots\wedge r_{j_{s-1}j_s}$$

则有

$$r_{ij_1}\wedge r_{j_1j_2}\wedge\cdots\wedge r_{j_{k-1}j}\leqslant r_{ij_1}\wedge\cdots\wedge r_{j_{l-1}j_l}\wedge r_{j_sj_{s+1}}\wedge\cdots\vee r_{j_{k-1}j}.$$

即在 $j_l=j_s$ 时,可以减少 $s-l$ 个因子,依此类推,总可以使它不出现重复因子,所以总存在 $m\leqslant n$,使

$$\underbrace{r_{ij_1}\wedge r_{j_1j_2}\wedge\cdots\wedge r_{j_{k-1}j}}_{K个}\leqslant\underbrace{r_{il_1}\wedge r_{l_1l_2}\wedge\cdots\wedge r_{l_{m-1}j}}_{m个}$$

从而

$$r_{ij_1}\wedge r_{j_1j_2}\wedge\cdots\wedge r_{j_{k-1}j}\leqslant\bigvee_{l_1=1}^{n}\cdots\bigvee_{l_{m-1}=1}^{n}(r_{il_1}\wedge r_{l_1l_2}\wedge\cdots\wedge r_{l_{m-1}j})=r_{ij}^{(m)}$$

于是

$$r_{ij}^{(k)}=\bigvee_{j_1=1}^{n}\cdots\bigvee_{j_{k-1}=1}^{n}(r_{ij_1}\wedge r_{j_1j_2}\wedge\cdots\wedge r_{j_{k-1}j})\leqslant r_{ij}^{(m)}$$

即 $\boldsymbol{R}^k\subseteq\boldsymbol{R}^m$. 所以 $k>n$ 时,$\boldsymbol{R}^k\subseteq\bigcup_{m=1}^{n}\boldsymbol{R}^m$.

定义 1.13.7 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 矩阵,

(1) 若 $\boldsymbol{I}\subseteq\boldsymbol{R}$,则称 $\boldsymbol{R}$ 为 F 自反矩阵;

(2) $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}$,则称 $\boldsymbol{R}$ 为 F 对称矩阵;

(3) 若 $\boldsymbol{R}^2\subseteq\boldsymbol{R}$,则称 $\boldsymbol{R}$ 为 F 传递矩阵;

(4) 若 $\boldsymbol{R}$ 是自反的又是对称的,则称 $\boldsymbol{R}$ 是 F 相似矩阵;

(5) 若 $\boldsymbol{R}$ 是自反的、对称的和传递的,则称 $\boldsymbol{R}$ 是 F 等价矩阵.

显然,一个 F 自反(对称、传递、相似、等价)矩阵对应于一个有限论域上的一个 F 自反(对称、传递、相似、等价)关系.

由定理 1.11.2 知,若 $\boldsymbol{R}$ 是 F 自反矩阵,则

$$\boldsymbol{I}\subseteq\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{R}^2\subseteq\cdots\subseteq\boldsymbol{R}^n\subseteq\cdots$$

若 $\boldsymbol{R}$ 是 F 传递矩阵,则

$$\boldsymbol{R}\supseteq\boldsymbol{R}^2\supseteq\cdots\supseteq\boldsymbol{R}^n\supseteq\cdots$$

所以若 $\boldsymbol{R}$ 是 F 自反和 F 传递矩阵,则 $\boldsymbol{R}$ 是幂等的,即 $\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R}$.

定理 1.13.6 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 矩阵,则

(1) R 的自反闭包 $\quad r(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{I}\quad$ (1.283)

(2) $\boldsymbol{R}$ 的对称闭包 $\quad s(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\quad$ (1.284)

(3) $\boldsymbol{R}$ 的相似闭包 $\quad a(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cup\boldsymbol{I}\quad$ (1.285)

(4) $\boldsymbol{R}$ 的传递闭包　　$t(\boldsymbol{R}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{R}^n$ (1.286)

(5) $\boldsymbol{R}$ 的等价闭包　　$e(\boldsymbol{R}) = t(s(\boldsymbol{R})) \cup I$ (1.287)

(6) $\boldsymbol{R}$ 是 F 相似矩阵，则 $\boldsymbol{R}$ 的等价闭包

$$e(\boldsymbol{R}) = t(\boldsymbol{R}) \cup I = t(\boldsymbol{R}) \tag{1.288}$$

定理结论直接由 §1.11 和 §1.12 中的结论得到.

定理 1.13.7　设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 矩阵，则

$$t(\boldsymbol{R}) = \bigcup_{m=1}^{n} \boldsymbol{R}^m. \tag{1.289}$$

证明　因为 $t(\boldsymbol{R}) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \boldsymbol{R}^m$，由定理 1.13.5 知，当 $k > n$ 时，$\boldsymbol{R}^k \subseteq \bigcup_{m=1}^{n} \boldsymbol{R}^m$，所以，

$$t(\boldsymbol{R}) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \boldsymbol{R}^m = \left(\bigcup_{m=1}^{n} \boldsymbol{R}^m\right) \cup \left(\bigcup_{m=n+1}^{\infty} \boldsymbol{R}^m\right) = \bigcup_{m=1}^{n} \boldsymbol{R}^m.$$

定理 1.13.8　设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 相似矩阵，则存在最小的正整数 $k \leqslant n$，

$$t(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}^k \tag{1.290}$$

且对于一切 $l \geqslant k$，有 $\boldsymbol{R}^k = \boldsymbol{R}^l$.

证明　由于 $\boldsymbol{R}$ 是 F 自反矩阵，则

$$\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{R}^2 \subseteq \cdots \subseteq \boldsymbol{R}^n \subseteq \cdots$$

由此　$t(\boldsymbol{R}) = \bigcup_{m=1}^{n} \boldsymbol{R}^m = \boldsymbol{R}^n$

由于 n 有限，则存在最小自然数 $k \leqslant n$，使

$$t(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^k$$

若 $l \geqslant k$，则 $\boldsymbol{R}^k \subseteq \boldsymbol{R}^l$，从而

$$t(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}^k \subseteq \boldsymbol{R}^l \subseteq \bigcup_{m=1}^{n} \boldsymbol{R}^m = t(\boldsymbol{R})$$

所以　$\boldsymbol{R}^l = \boldsymbol{R}^k$.

推论 1.13.2　设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 相似矩阵，则存在一个最小的正整数 k，使 $\boldsymbol{R}^k$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的等价闭包，即

$$e(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}^k \tag{1.291}$$

由此，我们可以用平方法求 F 相似矩阵的等价闭包，即求出

$$\boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{R}^4, \cdots,$$

若首次出现

$$\boldsymbol{R}^{2l} \circ \boldsymbol{R}^{2l} = \boldsymbol{R}^{2l}$$

则 $e(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}^{2l}$

定义 1.13.7　设 $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{R}_{ij})_{m\times n}$ 是 F 矩阵，$\forall \lambda \in [0,1]$，记

$$\boldsymbol{R}_\lambda = (\overline{\boldsymbol{R}_{ij}})_{m\times n}$$

$$\bar{r}_{ij}=\begin{cases}1, & r_{ij}\geqslant\lambda\\ 0, & r_{ij}<\lambda\end{cases}$$

则称 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 为 $\boldsymbol{R}$ 的 λ 一截矩阵,它所对应的关系叫做 $\boldsymbol{R}$ 的截关系.

F 矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中的元素只有0或1的矩阵称为布尔矩阵,所以 F 矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的 λ 一截矩阵是一个布尔矩阵.

定理 1.13.9 设 $\boldsymbol{R},S$ 是 F 矩阵,则 $\forall\lambda\in[0,1]$

(1)
$$\boldsymbol{R}\subseteq S\Leftrightarrow\boldsymbol{R}_\lambda\subseteq\boldsymbol{S}_\lambda \tag{1.292}$$
$$\boldsymbol{R}=S\Leftrightarrow\boldsymbol{R}_\lambda=\boldsymbol{S}_\lambda \tag{1.293}$$

(2)
$$(\boldsymbol{R}\cup S)_\lambda=\boldsymbol{R}_\lambda\cup\boldsymbol{S}_\lambda \tag{1.294}$$
$$(\boldsymbol{R}\cap S)_\lambda=\boldsymbol{R}_\lambda\cap\boldsymbol{S}_\lambda \tag{1.295}$$

证明 (1) 设 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{S}=(s_{ij})_{m\times n}$,若 $\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{S}$,则 $\boldsymbol{R}_\lambda\subseteq\boldsymbol{S}_\lambda$ 是显然的.

反之,若 $R\not\subseteq S$,则 $\exists i_0,j_0$,使 $r_{i_0j_0}>s_{i_0j_0}$ 取 $\lambda=s_{i_0j_0}$,则有 $\bar{r}_{i_0j_0}=1,\bar{s}_{i_0j_0}=0$,故 $\boldsymbol{R}_\lambda\not\subseteq\boldsymbol{S}_\lambda$,矛盾. 所以 $R\subseteq S$.

同理证 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}\Leftrightarrow\boldsymbol{R}_\lambda=\boldsymbol{S}_\lambda$.

(2) $\forall\ i,j$,由于

$$r_{ij}\vee s_{ij}\geqslant\lambda\Leftrightarrow r_{ij}\geqslant\lambda\text{ 或 }s_{ij}\geqslant\lambda$$
$$r_{ij}\wedge s_{ij}\geqslant\lambda\Leftrightarrow r_{ij}\geqslant\lambda\text{ 且 }s_{ij}\geqslant\lambda$$

所以 $(\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S})_\lambda=\boldsymbol{R}_\lambda\cup\boldsymbol{S}_\lambda,(\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S})_\lambda=\boldsymbol{R}_\lambda\cap\boldsymbol{S}_\lambda$.

一般地,$\{\boldsymbol{R}^{(t)}\mid t\in T\}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 矩阵集合族,则

$$(\bigcup_{t\in T}R^{(t)})_\lambda\neq\bigcup_{t\in T}R_\lambda^{(t)} \tag{1.296}$$
$$(\bigcap_{t\in T}\boldsymbol{R}^{(t)})_\lambda=\bigcap_{t\in T}\boldsymbol{R}_\lambda^{(t)} \tag{1.297}$$

定理 1.13.10 设 $\boldsymbol{R},\boldsymbol{S}$ 是 F 矩阵,则 $\forall\lambda\in[0,1]$,

$$(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})_\lambda=R_\lambda\circ S_\lambda \tag{1.298}$$

证明 设 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times l},\boldsymbol{S}=(s_{ij})_{l\times n},\boldsymbol{Q}=(q_{ij})_{m\times n}$,记 $\boldsymbol{Q}_\lambda=(\bar{q}_{ij})_{m\times n}$,则

$$\bar{q}_{ij}=1\Leftrightarrow q_{ij}\geqslant\lambda\Leftrightarrow\bigvee_{k=1}^{l}(r_{ik}\wedge s_{kj})\geqslant\lambda\Leftrightarrow\exists k,r_{ik}\wedge s_{kj}\geqslant\lambda\Leftrightarrow\exists k,r_{ik}\geqslant\lambda\text{ 且 }$$
$$s_{kj}\geqslant\lambda\Leftrightarrow\exists k,\bar{r}_{ik}=1\text{ 且 },\bar{s}_{ij}=1\Leftrightarrow\bigvee_{k=1}^{l}(\bar{r}_{ik}\wedge\bar{s}_{kj})=1$$

$$\bar{q}_{ij}=0\Leftrightarrow\bar{q}_{ij}\neq1\Leftrightarrow\bigvee_{k=1}^{l}(\bar{r}_{ik}\wedge\bar{s}_{kj})\neq1\Leftrightarrow\bigvee_{k=1}^{l}(\bar{r}_{ik}\wedge\bar{s}_{kj})=0$$

所以 $(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})_\lambda=\boldsymbol{R}_\lambda\circ\boldsymbol{S}_\lambda$.

由定理 1.11.11 和定理 1.12.5 立即可得下面的定理.

定理 1.13.11 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 矩阵,则:

(1) $\boldsymbol{R}$ 是 F 自反矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 是普通自反矩阵，它对应于普通自反关系；

(2) $\boldsymbol{R}$ 是 F 对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 是普通对称矩阵，它对应于普通对称关系；

(3) $\boldsymbol{R}$ 是 F 传递矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 是普通传递矩阵，它对应于普通传递关系；

(4) $\boldsymbol{R}$ 是 F 相似矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 是普通相似矩阵，它对应于普通相似关系；

(5) $\boldsymbol{R}$ 是 F 等价矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 是普通等价矩阵，它对应于普通等价关系.

如果 $\boldsymbol{R}$ 是有限论域 X 上的一个 F 等价关系，即 $\boldsymbol{R}$ 是一个 F 等价矩阵，由于每一个 R_λ 描述了 X 上的一个普通的等价关系，所以可以将 X 进行分类. 当 λ 从 1 降至 0 时，$\boldsymbol{R}_\lambda$ 不断发生变化，这种分类也随之变化，所以就得到 X 的一种动态分类.

定理 1.13.12　设 R 是有限论域 X 上 F 等价关系，若 $\lambda,\mu \in [0,1]$，且 $\lambda < \mu$，则 R_μ 所分出的每一类是 R_λ 所分出的某一类的子类，即 R_μ 的分类细于 R_λ 的分类.

证明　设 $\boldsymbol{R}_\mu = (\bar{r}'_{ij})_{n\times n}$　$\boldsymbol{R}_\lambda = (\bar{r}_{ij})_{n\times n}$. 若 $\bar{r}'_{ij} = 1$，则 $r_{ij} \geqslant \mu > \lambda$，故 $\bar{r}_{ij} = 1$.

这说明，若 x_i, x_j 按 $\boldsymbol{R}_\mu$ 归为一类，则 x_i, x_j 也按 R_λ 归为一类，所以 $\boldsymbol{R}_\mu$ 的每一类是 R_λ 的某一类的子类.

例 1.13.1　设 $\boldsymbol{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$，$R$ 是 X 上的一个 F 关系：

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

易证 R 是一个 F 等价关系.

令 λ 从 1 降至 0，x_i, x_j 按 R_λ 中的 $\bar{r}_{ij} = 1$ 归类.

若 $\lambda = 1$，则

$$\boldsymbol{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则相应的分类结果是：$\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\}$. 若 $\lambda = 0.8$,则

$$R_{0.8} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

相应的分类结果是：$\{x_1,x_3\},\{x_2\},\{x_4\},\{x_5\}$. 若 $\lambda = 0.6$,则

$$R_{0.6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

相应的分类结果是：$\{x_1,x_3\},\{x_2\},\{x_4,x_5\}$. 若 $\lambda = 0.5$,则

$$R_{0.5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

相应的分类结果是：$\{x_1,x_3,x_4,x_5\},\{x_2\}$. 若 $\lambda = 0.4$,则

$$R_{0.4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

相应的分类结果是：$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$.

由推论 1.13.2 得知,若 R 是 X 上的一个 F 相似关系,则用平方法求出 R 的等价闭包 $t(R)$,再用上面的动态聚类方法求得 $t(R)$ 的动态分类,由于 $t(R) \neq R$,从而得到对论域 X 的分类是一个近似的动态分类.

§1.14 L 型模糊关系

定义 1.14.1 设 $(L, \leqslant)$ 是格,若 $R \in F_L(X \times Y)$,则称 R 为 X 到 Y 的 L 型模糊关系,简称为 L-F 关系.

定义 1.14.2 设 R、$S \in F_L(X \times Y)$, $\forall (x,y) \in X \times Y$,定义

(1) $$R \subseteq S \Leftrightarrow R(x,y) \leqslant S(x,y) \tag{1.299}$$

(2) $$R = S \Leftrightarrow R(x,y) = S(x,y) \tag{1.300}$$

定义 1.14.3 设 $R,S \in F_L(X \times Y)$，$\forall (x,y) \in X \times Y$，定义

(1) $$(R \cup S)(x,y) = R(x,y) \vee S(x,y) \tag{1.301}$$

(2) $$(R \cap S)(x,y) = R(x,y) \wedge S(x,y) \tag{1.302}$$

(3) $$R^{-1}(y,x) = R(x,y) \tag{1.303}$$

分别称为 R 和 S 的并关系、交关系和 R 的逆关系.

定理 1.14.1 设 $R,S \in F_L(X \times Y)$，则

(1) $$R \subseteq S \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1} \tag{1.304}$$

(2) $$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1} \tag{1.305}$$

(3) $$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \tag{1.306}$$

(4) $$(R^{-1})^{-1} = R \tag{1.307}$$

证明与定理 1.10.1 类似，从略.

定义 1.14.4 设 L 是完备格，$R \in F_L(X \times Y)$，$S \in F_L(Y \times Z)$，$\forall (x,z) \in X \times Z$，定义

$$(R \circ S)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge S(y,z)) \tag{1.308}$$

$R \circ S$ 称为 R 和 S 的合成关系.

以下均假定 L 是无穷可分配的完备格.

定理 1.14.2 设 $R,R_1,R_2 \in F_L(X \times Y)$，$S,S_1,S_2 \in F_L(Y \times Z)$，$Q \in F_L(Z \times W)$，则

(1) $$(R \circ S) \circ Q = R \circ (S \circ Q) \tag{1.309}$$

(2) $$R \circ (S_1 \cup S_2) = R \circ S_1 \cup R \circ S_2 \tag{1.310}$$

$$(R_1 \cup R_2) \circ S = R_1 \circ S \cup R_2 \circ S \tag{1.311}$$

(3) $$R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap R \circ S_2 \tag{1.312}$$

$$(R_1 \cap R_2) \circ S \subseteq R_1 \circ S \cap R_2 \circ S \tag{1.313}$$

(4) $$R_1 \subseteq R_2，\text{则 } R_1 \circ S \subseteq R_1 \circ S \tag{1.314}$$

$$S_1 \subseteq S_2 \quad \text{则 } R \circ S_1 \subseteq R \circ S_2 \tag{1.315}$$

(5) $$R \circ I_Y = I_X \circ R = R \tag{1.316}$$

$$R \circ O_Y = O_X \circ R = 0 \tag{1.317}$$

(6) $$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} \tag{1.318}$$

其中 $I_X(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$，$O_X(x,y) = 0(\forall x,y \in X)$

一般地，$R \in F(X \times Y)$，$\{R_t \mid t \in T\} \subseteq F(X \times Y)$，$S \in F(Y \times Z)$，$\{S_t \mid t \in T\} \subseteq F(Y \times Z)$ 则

(7) $$R \circ (\bigcup_{t \in T} S_t) = \bigcup_{t \in T} (R \circ S_t) \tag{1.319}$$

(8) $$(\bigcup_{t \in T} R_t) \circ S = \bigcup_{t \in T} (R_t \circ S) \tag{1.320}$$

证明与定理 1.10.3 类似,从略.

定义 1.14.5 设 $R \in F_L(X \times X)$,定义

$$R^n = R^{n-1} \circ R \qquad (n \in \mathbf{N}) \tag{1.321}$$

则称 R^n 为 R 的 n 次幂.

定理 1.14.3 设 R、$S \in F_L(X \times X)$,则

(1) $$R \subseteq S, \text{则 } \forall n \in \mathbf{N}, R^n \subseteq S^n \tag{1.322}$$

(2) $$R^k \circ R^l = R^{k+l} \quad (k, l \in \mathbf{N}) \tag{1.323}$$

(3) $$(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n \tag{1.324}$$

证明与定理 1.10.4 类似,从略.

定义 1.14.6 设 $R \in F_L(X \times X)$.

(1) 若 $I_X \subseteq R$,则称 R 是 L-F 自反关系;

(2) 若 $R = R^{-1}$,则称 R 是 L-F 对称关系;

(3) 若 $R^2 \subseteq R$,则称 R 是 L-F 传递关系.

定理 1.14.4 设 $R \in F_L(X \times X)$,若 R 是 F 自反关系,则 $R^n \subseteq R^{n+1}$,且 R^n 是 F 自反关系.

证明 $R^n \subseteq R_{n+1}$ 的证明与定理 1.11.2 类似.

又因 $I_x \subseteq R \subseteq R^n$,故 R^n 是 F 自反的.

定理 1.14.5 设 R、$S \in F_L(X \times X)$,若 R 和 S 是 F 对称的,则 $R \circ S$ 对称的充分必要条件是 $R \circ S = S \circ R$.

证明与定理 1.11.4 类似,从略.

推论 1.14.1 设 $R \in F_L(X \times X)$,若 R 是 F 对称的,则 R^n 是 F 对称的.

定理 1.14.6 设 $R \in F_L(X \times X)$,若 R 是 F 传递的,则 R^n 是 F 传递的.

证明 由于 $R^2 \subseteq R$,则 $(R^n)^2 = (R^2)^n \subseteq R^n$,所以 R^n 是 F 传递的.

定理 1.14.7 设 $\{R_t \mid t \in T\} \in F_L(X \times X)$.

(1) 若 $\forall t \in T, R_t$ 是 F 自反的,则 $\bigcup_{t \in T} R_t$, $\bigcap_{t \in T} R_t$ 是 F 自反的;

(2) 若 $\forall t \in T, R_t$ 是 F 对称的,则 $\bigcup_{t \in T} R_t$, $\bigcap_{t \in T} R_t$ 是 F 对称的;

(3) 若 $\forall t \in T, R_t$ 是 F 传递的,则 $\bigcap_{t \in T} R_t$ 是 F 传递的.

证明与定理 1.11.1 类似,从略.

定理 1.14.8 设 $R \in F_L(X \times X)$,令

$$t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \tag{1.325}$$

则 $t(R)$ 是包含 R 的最小传递关系.

证明　显然 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$,由于 $R^m \circ R^n \subseteq t(R) \quad (\forall m,n \in N)$,则

$$t(R) \circ R^m = (\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n) \circ R^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^n \circ R^m) \subseteq t(R)$$

从而

$$(t(R))^2 = t(R) \circ \bigcup_{m=1}^{\infty} R^m = \bigcup_{m=1}^{\infty} t(R) \circ R^m \subseteq t(R)$$

所以 $t(R)$ 是 F 传递的.

设 $R \subseteq R'$,R' 是传递的,则

$$R^2 \subseteq (R')^2 \subseteq R'$$

从而 $\forall n \in \mathbf{N}, R^n \subseteq R'$,故

$$t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R'$$

所以 $t(R)$ 是包含 R 的最小传递关系.

由于 $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是包含 R 的最小传递关系,所以 $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是 R 的传递闭包.

定理 1.14.9　设 $R,S \in F_L(X \times X)$.

(1) 若 R 是 F 自反的,则 $t(R)$ 是 F 自反的;

(2) 若 R 是 F 对称的,则 $t(R)$ 是 F 对称的;

(3) 若 R 是 F 传递的,则 $t(R) = R$;

(4) 若 $R \subseteq S$,则 $t(R) \subseteq t(S)$;

(5) $(t(R))^{-1} = t(R^{-1})$;

证明　只证(5),其他易证.

(5) $(t(T))^{-1} = (\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^{-1})^n = t(R^{-1})$.

定义 1.14.7　设 L 是完备格,$R \in F_L(X \times X)$,若 R 是 L-F 自反,L-F 对称和 L-F 传递关系,则称 R 是 X 上的 L-F 等价关系.

定理 1.14.10　设 L 是无穷可分配格,$R \in F_L(X \times X)$,若 R 是 F 自反和 F 对称的,则 $t(R)$ 是包含 R 的最小 F 等价关系,即是 R 的 F 等价闭包,记为 $e(R)$.

证明　由定理 1.14.8 知,$t(R)$ 是包含 R 的最小传递关系,设 S 是 R 的 F 等价闭包,则 S 是传递的,故 $S \supseteq t(R)$,又 $t(R)$ 是 F 自反和 F 对称的,所以 $t(R)$ 是 F 等价的,故 $t(R)$ 是包含 R 的最小 F 等价关系.

定理 1.14.11　设 L 是无穷可分配格,$R \in F_L(X \times X)$,则 R 的等价闭包

$$e(R) = t(R \cup R^{-1}) \cup I_X \tag{1.326}$$

证明　显然 $t(R \cup R^{-1}) \cup I_X$ 是包含 R 且是 F 等价关系. 设 S 是 F 等价,关

系且 $S \supseteq R$,则

$$R \cup R^{-1} \subseteq S \cup S^{-1} = S$$

由此 $t(R \cup R^{-1}) \subseteq t(S) = S$.

又因为 $I_X \subseteq S$,故 $t(R \cup R^{-1}) \cup I_X \subseteq S$.

所以 $t(R \cup R^{-1}) \cup I_X$ 是包含 R 的最小等价关系,即 $e(R) = t(R \cup R^{-1}) \cup I_X$.

定理 1.14.12 设 L 是完备格,$R \in F_L(X \times X)$,则 R 是 F 等价关系的充分必要条件是 $\forall \lambda \in L, R_\lambda$ 是等价关系.

证明 设 R 是 F 等价关系,则 $\forall x \in X, R(x,x) = 1$,从而 $(x,x) \in R_\lambda$,故 R_λ 是自反的. 又 $R(x,y) = R(y,x)$,则 $(x,y) \in R_\lambda$ 时 $(y,x) \in R_\lambda$,所以 R_λ 是对称的,若 $(x,y) \in R_\lambda, (y,z) \in R_\lambda$,则 $R(x,y) \geqslant \lambda, R(y,z) \geqslant \lambda$,从而

$$R(x,z) \geqslant R \circ R(x,z) = \bigvee_{y \in X} (R(x\ y) \wedge R(y,z)) \geqslant \lambda$$

故 $(x,z) \in R_\lambda$,即 R_λ 是传递的,所以 R_λ 是等价关系.

反之设 $\forall \lambda \in L, R_\lambda$ 是等价关系.

由于 $\forall x \in X, (x,x) \in R_1$,故 $R(x,x) = 1$,即 R 是 F 自反的. 令 $R(x,y) = \lambda$,则 $(x,y) \in R_\lambda$,由此 $(y,x) \in R_\lambda$,即 $R(y,x) \geqslant 1 = R(x,y)$,同理证 $R(x,y) \geqslant R(y,x)$. 所以 $R(x,y) = R(y,x)$,即 R 是 F 对称的.

由于 $(x,y) \in R_\lambda, (y,z) \in R_\lambda$,则 $(x,z) \in R_\lambda$,即 $R(x,y) \geqslant \lambda, R(y,z) \geqslant \lambda$,则 $R(x,z) \geqslant \lambda$,从而 $R(x,z) \geqslant R(x,y) \wedge R(y,z)$,故 $R(x,z) \geqslant \bigvee_{y \in X} (R(x,y) \wedge R(y,z))$,

所以 $R^2 \subseteq R$,即 R 是 F 传递的. 由此,R 是 F 等价关系.

设 R 是 X 上的 F 等价关系. $\forall x \in X$,令 $[x]_\lambda = \{y \mid (x,y) \in R_\lambda\} = \{y \mid R(x,y) \geqslant \lambda\}$,则

$$X/R_\lambda = \{[x]_\lambda \mid x \in X\}$$

是 R 的 λ 水平的分类.

定理 1.14.13 设 L 是可分配的完备格,则 $t(R) = \bigcup_{m=1}^{n} R^m$ 的充分必要条件是

$$\bigcup_{m=1}^{n} R^m \supseteq R^{n+1}$$

证明 必要性显然.

已知 $\bigcup_{m=1}^{n} R^m \supseteq R^{n+1}$,则 $(\bigcup_{m=1}^{n} R^m) \circ R \supseteq R^{n+1} \circ R$,从而 $\bigcup_{m=1}^{n} R^m \supseteq \bigcup_{m=1}^{n} R^{m+1} \supseteq R^{m+2}$

一般可证 $\bigcup_{m=1}^{n} R^m \supseteq R^{n+i} \quad (i \in \mathbf{N})$,故 $\bigcup_{m=1}^{n} R^m \supseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} R^m = t(R)$,又 $t(R) = \bigcup_{m=1}^{\infty} R^m \supseteq \bigcup_{m=1}^{n} R^m$

所以 $t(R)=\bigcup\limits_{m=1}^{n} R^m$

定理 1.14.14 设 X 是 n 元有限论域,$R\in F_L(X\times X)$,则

$$t(R)=\bigcup_{m=1}^{n} R^m \tag{1.327}$$

证明 若 $R^{n+1}(x,z)=0(z\in X)$,则 $R(x,z)\geqslant R^{n+1}(x,z)$,从而 $(\bigcup\limits_{m=1}^{n} R^m)(x,z)\geqslant R^{n+1}(x,z)$ 即

$$\bigcup_{m=1}^{n} R^m \supseteq R^{n+1}$$

若 $R^{n+1}(x,z)\neq 0$,则

$$R^{n+1}(x,z)=\bigvee_{y_1=1}^{n}\cdots\bigvee_{y_n=1}^{n}(R(x,y_1)\wedge R(y_1,y_2)\wedge\cdots\wedge R(y_n,z))\neq 0,$$

故存在序列 $x,x_1,\cdots x_n,z$,使

$$R^{n+1}(x,z)=R(x,x_1)\wedge R(x_1,x_2)\wedge\cdots\wedge R(x_n,z)\neq 0$$

由于 X 是 n 元集合,则 $x,x_1\cdots,x_n,z$ 中有相同元素,不妨设 $x_i=x_j(i<j)$ 于是

$$R(x,x_1)\neq 0,R(x_1,x_2)\neq 0,\cdots,R(x_i,x_{j+1})\neq 0,\cdots,R(x_n,z)\neq 0$$

由此 $R^{n+1-(j-i)}(x,z)\neq 0$. 且 $R^{n+1-(j-i)}(x,z)=\bigvee\limits_{y_1=1}^{n}\cdots\bigvee\limits_{y_i=1}^{n}\bigvee\limits_{y_{j+1}=1}^{n}\cdots\bigvee\limits_{y_n=1}^{n}(R(x,y_1)\wedge\cdots$

$$\wedge R(y_i,y_{i+1})\wedge\cdots\wedge R(y_n,z))$$

$$\geqslant\bigvee_{y_1=1}^{n}\cdots\bigvee_{y_n=1}^{n}(R(x,y_1)\wedge\cdots\wedge R(y_{n+1},z))$$

$$=R^{n+1}(x,z)$$

于是 $R^{n+1}\subseteq\bigcup\limits_{m=1}^{n} R^m$,所以 $t(R)=\bigcup\limits_{m=1}^{n} R^m$

定理 1.14.15 设 X 是 n 元有限论域,$R\in F_L(X\times X)$,若 R 是 F 自反和 F 对称,则存在最小的正数 k,使

$$e(R)=t(R)=R^k \tag{1.328}$$

证明与定理 1.13.8 类似,从略.

第二章　模糊群与模糊环

§2.1　模　糊　群

定义 2.1.1　设 X 是群，$A\in F(X)$，$\forall x,y\in X$，有

(1)
$$A(xy)\geqslant A(x)\wedge A(y) \tag{2.1}$$

(2)
$$A(e)\geqslant A(x) \tag{2.2}$$

(3)
$$A(x^{-1})\geqslant A(x) \tag{2.3}$$

若 A 满足条件(1)，则称 A 为 X 的模糊子半群；若 A 满足条件(1)和(2)，则称 A 为 X 的模糊独异点；若 A 满足条件(1)，(2)和(3)，则称 A 为 X 的模糊子群；分别简称为 X 的 F 子半群，F 独异点和 F 子群.

定理 2.1.1　A 是群 X 上的 F 子群的充分必要条件是 $\forall x,y\in X$，有

(1)　$A(xy)\geqslant A(x)\wedge A(y)$；

(2)　$A(x^{-1})\geqslant A(x)$.

证明　必要性显然.

在(1)中令 $y=x^{-1}$，则 $A(e)=A(xx^{-1})\geqslant A(x)\wedge A(x^{-1})=A(x)$，所以 A 是群 X 上的 F 子群.

定理 2.1.2　设 A 是群 X 上的 F 子群，则

(1)　$\forall x\in X, A(x^{-1})=A(x)$；

(2)　$\forall x,y\in X$，若 $A(e)=A(xy^{-1})$，则 $A(x)=A(y)$.

证明　(1) 因为 $A(x)=A((x^{-1})^{-1})\geqslant A(x^{-1})$，又 $A(x^{-1})\geqslant A(x)$，所以 $A(x^{-1})=A(x)$.

(2) $A(x)=A(xy^{-1}y)\geqslant A(xy^{-1})\wedge A(y)=A(e)\wedge A(y)=A(y)$，同理 $A(y)\geqslant A(x)$，所以 $A(x)=A(y)$.

定理 2.1.3　A 是群 X 上的 F 子群的充分必要条件是 $\forall x,y\in X$，有

$$A(xy^{-1})\geqslant A(x)\wedge A(y) \tag{2.4}$$

证明　(必要性)设 A 是群 X 上的 F 子群，则

$$A(xy^{-1})\geqslant A(x)\wedge A(y^{-1})=A(x)\wedge A(y)$$

(充分性)已知 $A(xy^{-1})\geqslant A(x)\wedge A(y)$.

在式(2.4)中令 $y=x$,则 $A(e)=A(xx^{-1})\geqslant A(x)\wedge A(x^{-1})=A(x)$;在式(2.4)中令 $x=e$,则

$$A(y^{-1})\geqslant A(e)\wedge A(y)=A(y);$$

又因为 $A(xy)=A(x(y^{-1})^{-1})=A(x)\wedge A(y^{-1})\geqslant A(x)\wedge A(y)$,所以 A 是群 X 上的 F 子群.

定理 2.1.4 设 $A_t(t\in T)$ 是群 X 的 F 子群,则 $\bigcap_{t\in T}A_t$ 也是群 X 的 F 子群.

证明 $\forall x,y\in X$,

$$\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)(xy^{-1})=\bigwedge_{t\in T}A_t(xy^{-1})\geqslant\bigwedge_{t\in T}(A_t(x)\wedge A_t(y))=(\bigwedge_{t\in T}A_t(x))\wedge(\bigwedge_{t\in T}A_t(y))$$

$$=\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)(x)\wedge\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)(y)$$

所以 $\bigcap_{t\in T}A_t$ 也是群 X 的 F 子群.

定理 2.1.5 A 是群 X 的 F 子群(F 独异点和 F 子半群)的充分必要条件是 $\forall\lambda\in[0,1]$,A_λ 是 X 的子群(独异点和子半群).

证明 (必要性)不妨假设 $A_\lambda=\varnothing$ 也是 X 的子群、独异点和子半群. 以 A 是群 X 的 F 子群为例证明. $\forall x,y\in A_\lambda$,则 $A(x)\geqslant\lambda$,$A(y)\geqslant\lambda$,因为 $A(xy^{-1})\geqslant A(x)\wedge A(y)\geqslant\lambda$,所以 $xy^{-1}\in A_\lambda$,即 A_λ 是 X 的子群.

(充分性) 设 $A_\lambda\neq\varnothing$,且 A_λ 是 X 的子群,假若存在 $x_0,y_0\in X$,使

$$A(x_0,y_0^{-1})<A(x_0)\wedge A(y_0)$$

令
$$\lambda=\frac{1}{2}(A(x_0,y_0^{-1})+(A(x_0)\wedge A(y_0)))$$

则
$$A(x_0)\wedge A(y_0)>\lambda>0,A(x_0y_0^{-1})<\lambda$$

从而 $A(x_0)>\lambda$,$A(y_0)>\lambda$,所以 $x_0\in A_\lambda$,$y_0\in A_\lambda$,由于 A_λ 是 X 的子群,则 $x_0y_0^{-1}\in A_\lambda$,即 $A(x_0y_0^{-1})\geqslant\lambda$,与 $A(x_0y_0^{-1})<\lambda$ 矛盾,故 $\forall x,y\in X$,$A(xy^{-1})\geqslant A(x)\wedge A(y)$,所以 A 是群 X 的 F 子群.

定理 2.1.6 群 X 的 F 子集 A 是 F 子群的充分必要条件是 $\forall x,y\in X$,若 $A(x)<A(y)$,则 $A(xy)=A(x)$.

证明 (必要性)因为 A 是群 X 的 F 子群,则 $A(xy)\geqslant A(x)\wedge A(y)=A(x)$. 假若 $A(xy)>A(x)$,则 $A(x)=A(xyy^{-1})\geqslant A(xy)\wedge A(y^{-1})>A(x)\wedge A(y)=A(x)$,由此矛盾,推导出 $A(xy)=A(x)$.

(充分性)已知若 $A(x)<A(y)$,则 $A(xy)=A(x)$.

首先假若存在 $x_0\in X$,使 $A(x_0^{-1})<A(x_0)$,则 $A(e)=A(x_0^{-1}x_0)=A(x_0^{-1})<A(x_0)$,又 $A(e)=A(ex_0)=A(x_0)$,两式矛盾,所以 $\forall x\in X$,$A(x)\leqslant A(x^{-1})$.

其次假若存在 $x_0, y_0 \in X$，使 $A(x_0y_0) < A(x_0) \wedge A(y_0)$，不妨设 $A(x_0) \geqslant A(y_0)$，则 $A(x_0y_0) < A(y_0) \leqslant A(y_0^{-1})$，又因为 $A(y_0) \leqslant A(x_0) = A(x_0y_0y_0^{-1}) = A(x_0y_0)$，这与 $A(x_0y_0) < A(y_0)$ 矛盾，从而 $\forall x, y \in X$，有 $A(xy) \geqslant A(x) \wedge A(y)$；所以 A 群是 X 的 F 子群.

定理 2.1.7 若群 X 的每个元素的阶都是有限数，则 X 的 F 子半群恒为 X 的 F 子群.

证明 $\forall x \in X$，若 $x \neq e$，则 x 的阶 $n > 1$，即 $x^n = e$，则 $x^{-1} = x^{n-1}$，由此

$$A(x^{-1}) = A(x^{n-1}) \geqslant A(x) \wedge \cdots \wedge A(x) = A(x)$$

又 $A(e^{-1}) = A(e)$，则 $\forall x \in X, A(x^{-1}) \geqslant A(x)$，所以 A 是 X 的 F 子群.

推论 2.1.1 有限群的 F 子半群恒为 F 子群.

现在我们举一个无限群 X 的 F 子半群不是 X 的 F 子群的例子.

例 2.1.1 无限循环群 $X = \{e, a, a^{-1}, a^2, a^{-2}, \cdots\}$，设 X 的 F 子集 A 为：

$$A(e) = 1, A(a^k) = \frac{1}{2}, A(a^{-k}) = \frac{1}{4} (k = 1, 2, \cdots)$$

因为当 $k, l > 1$ 时，$A(a^ka^l) = A(a^{k+l}) = \frac{1}{2} = A(a^k) \wedge A(a^l)$，又

$$A(a^ka^{-l}) = A(a^{k-l}) = \begin{cases} \frac{1}{2}, k > l \\ 1, k = l \\ \frac{1}{4}, k < l \end{cases}$$

从而，$A(a^ka^{-l}) \geqslant A(a^k) \wedge A(a^{-l})$，所以 A 是 X 的 F 子半群。但是 $A(a^k) = \frac{1}{2} \neq A(a^{-k}) = \frac{1}{4}$，所以 A 不是 X 的 F 子群.

定理 2.1.8 设 A 是群 X 的 F 子群，对于任意整数 k, l，若 $A(a^k) > A(a^l)$，则对于任意的整数 r，$A(a^{kr+l}) = A(a^l)$.

证明 $A(a^{kr+l}) = A(a^{kr}a^l) \geqslant A(a^{kr}) \wedge A(a^l) \geqslant A(a^k) \wedge A(a^l) = A(a^l)$ 即 $A(a^{kr+l}) \geqslant A(a^l)$. 假若 $A(a^{kr+l}) > A(a^l)$，则

$$A(a^l) = A(a^{kr+l}a^{-kr}) \geqslant A(a^{kr+l}) \wedge A(a^{-kr}) \geqslant A(a^{kr+l}) \wedge A(a^{kr}) > A(a^l)$$

由此矛盾知 $A(a^{kr+l}) = A(a^l)$.

引理 2.1.1 设 X 是生成元为 a 的 m 阶循环群，A 是 X 的 F 子群，则 X 的任意元素 $a^k (k \in \mathbf{Z})$ 有 $A(a^k) = A(a^d)$.

其中，d 是 m 和 k 的最大公因数，即 $d = (m, k)$.

证明 因为 $d = (m, k)$，则 $\exists s, t \in \mathbf{Z}$，使 $ks + mt = d$. 从而

$$a^d = a^{ks+mt} = a^{ks}(a^m)^t = (a^k)^s$$

则 $A(a^d)=A((a^k)^s)=A((a^k)^{|s|})\geqslant A(a^k)$，令 $k=dp$，则 $A(a^k)=A((a^d)^p)=A((a^d)^{|p|})\geqslant A(a^d)$，所以 $A(a^k)=A(a^d)$.

定义 2.1.2　设 A 是群 X 的 F 子集，若 $\forall x\in X(x\neq e)$ 有 $A(x)=c\leqslant A(e)$（c 是常数），则称 A 是群 X 的平凡 F 子群.

定理 2.1.9　设 X 是至少有二元的群，则 X 只有平凡 F 子群的充分必要条件是 X 是素数阶的循环群.

证明　设 X 是素数阶 p 的循环群，a 是 X 的生成元，即

$$X=\{e,a,a^2,\cdots,a^{p-1}\}.$$

$\forall a^k\in X(1\leqslant k\leqslant p-1)$，设 A 是 X 的 F 子群，因 $(k,p)=1$，故 $A(a^k)=A(a)$，又 $A(x)\leqslant A(e)$，所以 A 是平凡的 F 子群.

反之，设 X 只有平凡的 F 子群，则 X 不能有含两个元以上的真子群，否则该子群的特征函数就是 X 的一个非平凡 F 子群，由群论知识知，X 无真子群，X 是素数阶的循环群.

§2.2　模糊群的等价条件

定义 2.2.1　设 $(X,\cdot)$ 是有一个二元运算的代数系统，在 $F(X)$ 中定义二元运算，$\forall A,B\in F(X)$，$z\in X$，

$$(A\cdot B)(z)=\bigvee_{xy=z}A(x)\wedge A(y) \tag{2.5}$$

则称 $A\cdot B$ 为 F 集 A 和 B 的乘积，简记 $A\cdot B$ 为 AB.

容易验证，如果代数系统 $(X,\cdot)$ 有结合律、交换律，则代数系统 $(F(X),\cdot)$ 也有结合律、交换律.

定理 2.2.1　设 X 是有一个二元运算的代数系统，$\forall A,B\in F(X)$，及 x_λ,y_μ 是 X 上的模糊点，则

(1)
$$x_\lambda y_\mu=(xy)_{\lambda\wedge\mu} \tag{2.6}$$

(2)
$$AB=\cup\{x_\lambda y_\mu\mid x_\lambda\in A,y_\mu\in B\}. \tag{2.7}$$

证明　(1) 由定义 2.2.1 直接可得.

(2) $\forall z\in X$，$\exists u,v\in X$，使得 $z=uv$，不妨设 $A(u)>0$，$B(v)>0$，则

$$\begin{aligned}AB(z)&=\bigvee_{uv=z}(A(u)\wedge B(v))\geqslant\bigvee_{uv=z}\bigvee_{\substack{x_\lambda\in A\\y_\mu\in B}}(x_\lambda(u)\wedge y_\mu(v))\\&=\bigvee_{\substack{x_\lambda\in A\\y_\mu\in B}}\Big(\bigvee_{uv=z}x_\lambda(u)\wedge y_\mu(v)\Big)\\&=\bigvee_{\substack{x_\lambda\in A\\y_\mu\in B}}(x_\lambda y_\mu)(z)=\Big(\bigcup_{\substack{x_\lambda\in A\\y_\mu\in B}}x_\lambda y_\mu\Big)(z)\end{aligned}$$

另外,因为 $u_{A(u)} \in A, v_{B(u)} \in B$,有

$$\begin{aligned}(\bigcup_{\substack{x_\lambda \in A \\ y_\mu \in B}} x_\lambda y_\mu)(z) &= \bigvee_{\substack{x_\lambda \in A \\ y_\mu \in B}} (\bigvee_{uv=z} x_\lambda(u) \wedge y_\mu(v)) \\ &= \bigvee_{uv=z} \bigvee_{\substack{x_\lambda \in A \\ y_\mu \in B}} (x_\lambda(u) \wedge y_\mu(v)) \\ &\geqslant \bigvee_{uv=z} (u_{A(u)}(u) \wedge v_{B(v)}(v)) \\ &= \bigvee_{uv=z} (A(u) \wedge B(v)) = (AB)(z)\end{aligned}$$

所以 $(AB)(z) = (\bigcup_{\substack{x_\lambda \in A \\ y_\mu \in B}} x_\lambda y_\mu)(z)$,即 $AB = \cup \{x_\lambda y_\mu | x_\lambda \in A, y_\mu \in B\}$.

定理 2.2.2 设 X 是半群,$A \in F(X)$,$A \neq \emptyset$,则下列三个条件等价:

(1) $$\forall x, y \in X, A(xy) \geqslant A(x) \wedge A(y)$$

(2) $$AA \subseteq A \tag{2.8}$$

(3) $$\forall x_\lambda, y_\mu \in A, x_\lambda y_\mu \in A \tag{2.9}$$

证明 (1)⇒(2) $(AA)(z) = \bigvee_{xy=z} (A(x) \wedge A(y)) \leqslant \bigvee_{xy=z} (A(xy)) = A(z)$

所以 $AA \subseteq A$.

(2)⇒(3) 设 $x_\lambda, y_\mu \in A$,则 $x_\lambda y_\mu \in AA \subseteq A$.

(3)⇒(1) $\forall x, y \in X$,不妨设 $A(x) \neq 0, A(y) \neq 0$,由 $x_{A(x)}, y_{A(y)} \in A$,从而 $A(xy) \geqslant (x_{A(x)} y_{A(y)})(xy) = (xy)_{A(x) \wedge A(y)}(xy) = A(x) \wedge A(y)$.

定理 2.2.3 设 A 是群 X 的 F 子群,则 $AA = A$.

证明 $\forall x \in X$,有

$$(AA)(x) = \bigvee_{yz=x} (A(y) \wedge A(z)) = \bigvee_{y \in X} (A(y) \wedge A(y^{-1}x)) \geqslant A(e) \wedge A(x) = A(x)$$

即 $AA \supseteq A$,又 $AA \subseteq A$,所以 $AA = A$.

定义 2.2.2 设 A 是群 X 的 F 子集,定义 A^{-1} 为 $\forall x \in X$,

$$A^{-1}(x) = A(x^{-1}) \tag{2.10}$$

则称 A^{-1} 为 A 的 F 逆集.

定理 2.2.4 设 X 是群,$A, B \in F(X)$,则

(1) $$(A^{-1})^{-1} = A, \tag{2.11}$$

(2) $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \tag{2.12}$$

(3) $A \subseteq B$,则 $A^{-1} \subseteq B^{-1}$,

(4) $A \subseteq A^{-1}$,则 $A = A^{-1}$.

证明 (1) $(A^{-1})^{-1}(x) = A^{-1}(x^{-1}) = A(x)$,故 $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) $$\begin{aligned}(AB)^{-1}(x) = AB(x^{-1}) &= \bigvee_{yz=x^{-1}} (A(y) \wedge B(z)) \\ &= \bigvee_{z^{-1}y^{-1}=x} (B(z) \wedge A(y))\end{aligned}$$

$$= \bigvee_{z^{-1}y^{-1}=x} (B((z^{-1})^{-1}) \wedge A((y^{-1})^{-1}))$$
$$= \bigvee_{z^{-1}y^{-1}=x} (B^{-1}(z^{-1}) \wedge A^{-1}(y^{-1}))$$
$$= (B^{-1}A^{-1})(x)$$

所以$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(3)因为 $A^{-1}(x) = A(x^{-1})$, $B^{-1}(x) = B(x^{-1})$,又 $A \subseteq B$,则 $A(x^{-1}) \leqslant B(x^{-1})$,从而 $A^{-1}(x) \leqslant B^{-1}(x)$,所以 $A^{-1} \subseteq B^{-1}$.

(4)由 $A \subseteq A^{-1}$, $A^{-1} \subseteq (A^{-1})^{-1} = A$,所以 $A^{-1} = A$.

定理 2.2.5　设 A 是群 X 的 F 子集,则下列条件等价:

(1)
$$\forall x \in X, A(x^{-1}) \geqslant A(x);$$

(2)
$$A \subseteq A^{-1}. \tag{2.13}$$

证明　$\forall x \in X, A(x^{-1}) \geqslant A(x) \Leftrightarrow A^{-1}(x) \geqslant A(x) \Leftrightarrow A^{-1} \supseteq A$.

定理 2.2.6　群 X 的 F 子集 A 是 X 的 F 子群的充分必要条件是

(1) $AA \subseteq A$;

(2) $A \subseteq A^{-1}$.

定理 2.2.7　设 A 是群 X 的 F 子集,则 A 是 X 的 F 子群的充分必要条件是 $AA^{-1} \subseteq A$.

证明(必要性)　设 A 是 X 的 F 子群,则 $AA \subseteq A$, $A \subseteq A^{-1}$,由定理 2.2.4 知 $A = A^{-1}$,从而 $AA^{-1} \subseteq A$.

(充分性)由于 $AA^{-1} \subseteq A$,则

$$A(e) \geqslant (AA^{-1})(e) = \bigvee_{xx^{-1}=e} (A(x) \wedge A^{-1}(x^{-1})) = \bigvee_{xx^{-1}=e} (A(x) \wedge A(x)) = A(x)$$

又由 $AA^{-1} \subseteq A$ 得$(AA^{-1})^{-1} \subseteq A^{-1}$,即 $AA^{-1} \subseteq A^{-1}$,则

$$(AA^{-1})(x) = \bigvee_{yz=x} (A(y) \wedge A^{-1}(z)) \leqslant A^{-1}(x)$$

令 $z = e$,则 $\bigvee_{y=x} (A(y) \wedge A^{-1}(e)) \leqslant A^{-1}(x)$,即 $A(x) \wedge A(e) \leqslant A^{-1}(x)$

故 $A(x) \leqslant A^{-1}(x)$,即 $A \subseteq A^{-1}$,由定理 2.2.4 知,$A \subseteq A^{-1}$,则 $A = A^{-1}$,从而由 $AA^{-1} \subseteq A$,得 $AA \subseteq A$,所以 A 是 F 子群.

定理 2.2.8　设 X 是群, $\forall \lambda \in [0,1]$,令

$$\tilde{X}_\lambda = \{x_\lambda \mid x \in X\} \tag{2.14}$$

则 $\tilde{X}_\lambda$ 关于乘法(2.6)构成一个群.

证明　显然 $\tilde{X}_\lambda$ 关于乘法(2.6)封闭,且满足结合律,所以 $\tilde{X}_\lambda$ 是半群. 又因为

$$x_\lambda e_\lambda = (xe)_\lambda = x_\lambda = e_\lambda x_\lambda$$

$$x_\lambda(x^{-1})_\lambda=(xx^{-1})_\lambda=e_\lambda=(x^{-1})_\lambda x_\lambda$$

所以 e_λ 是单位元，x_λ^{-1} 是 x_λ 的逆元. 故 $\widetilde{X}_\lambda$ 是一个群.

由定理 2.2.8 知，对于 $\forall\lambda\in[0,1]$，我们可以在群 X 的 F 点集合 $\widetilde{X}_\lambda$ 中定义一个逆运算，

$$\forall x_\lambda\in\widetilde{X}_\lambda,(x_\lambda)^{-1}=(x^{-1})_\lambda \tag{2.15}$$

定理 2.2.9 设 A 是群 X 的 F 子集，则下列条件等价：$\forall x\in X$，

(1) $A(x^{-1})\geqslant A(x)$；

(2) $\forall\lambda\in[0,1],x_\lambda\in A$，则$(x^{-1})_\lambda\in A$.

证明 (1)⇒(2)，已知 $A(x^{-1})\geqslant A(x)$

若 $x_\lambda\in A$，则 $A(x)\geqslant\lambda$，从而 $A(x^{-1})\geqslant\lambda$，故$(x^{-1})_\lambda\in A$.

(2)⇒(1)已知 $x_\lambda\in A$，则$(x^{-1})_\lambda\in A$.

假若$\exists x_0\in X,A(x_0^{-1})<A(x_0)$，令 $\lambda_0=\frac{1}{2}(A(x_0^{-1})+A(x_0))$则 $A(x_0)>\lambda_0,A(x_0^{-1})<\lambda_0$，从而 $x_{0\lambda_0}\in A$ 而$(x_0^{-1})_{\lambda_0}\notin A$，与已知条件矛盾，故$A(x^{-1})\geqslant A(x)$.

定理 2.2.10 设 A 是群 X 的 F 子集，则 A 是群 X 的 F 子群的充分必要条件是 $\forall\lambda,\mu\in[0,1]$，有

(1) $\forall x_\lambda,y_\mu\in A$，则 $x_\lambda y_\mu\in A$

(2) $\forall x_\lambda\in A$，则$(x^{-1})_\lambda\in A$. (2.16)

定理 2.2.11 设 A 是群 X 的 F 子集，则 A 是群 X 的 F 子群的充分必要条件是 $\forall\lambda,\mu\in[0,1]$有

$$\forall x_\lambda,y_\mu\in A,\text{则 } x_\lambda(y^{-1})_\mu\in A \tag{2.17}$$

证明 必要性是显然的.

充分性，在 $x_\lambda(y^{-1})_\mu\in A$ 中取$(y^{-1})_\mu=(x^{-1})_\lambda$，则 $x_\lambda(x^{-1})_\lambda=e_\lambda\in A$，又由 $e_\lambda\in A,x_\lambda\in A$ 得 $e_\lambda(x^{-1})_\lambda=(x^{-1})_\lambda\in A$.

又因为$\forall x_\lambda,y_\mu\in A,(y^{-1})_\mu\in A$，从而 $x_\lambda(y^{-1})_\mu^{-1}=x_\lambda y_\mu\in A$，所以，$A$ 是群 X 的 F 子群.

§2.3 模糊正规子群

定义 2.3.1 设 X 是群，$A\in F(X)$，$\forall a\in X$，定义

(1) $$(aA)(x)=A(a^{-1}x) \tag{2.18}$$

(2) $$(Aa)(x)=A(xa^{-1}) \tag{2.19}$$

aA 称为 A 的 F 左陪集, Aa 称为 A 的 F 右陪集.

定理 2.3.1 设 A 是群 X 的 F 子集,则 $\forall a \in X, \lambda \in [0,1]$ 有

(1) $$(aA)_\lambda = aA_\lambda; \tag{2.20}$$

(2) $$(Aa)_\lambda = A_\lambda a. \tag{2.21}$$

证明 $\forall x \in aA_\lambda$,则 $\exists y \in A_\lambda$,使得 $x = ay$,即 $A(y) \geqslant \lambda$, $y = a^{-1}x$,从而 $A(a^{-1}x) = (aA)(x) \geqslant \lambda$,所以 $x \in (aA)_\lambda$,即 $aA_\lambda \subseteq (aA)_\lambda$. 反之,若 $x \in (aA)_\lambda$,则 $(aA)(x) \geqslant \lambda$,即 $A(a^{-1}x) \geqslant \lambda$,令 $y = a^{-1}x$,则 $A(y) \geqslant \lambda$,即 $y \in A_\lambda$,而 $x = ay$,故 $x \in aA_\lambda$,即 $(aA)_\lambda \subseteq aA_\lambda$,所以 $(aA)_\lambda = aA_\lambda$. 同理证 $(Aa)_\lambda = A_\lambda a$.

定义 2.3.2 设 A 是群 X 的 F 子集,若 $\forall x \in X$,有

$$xA = Ax \tag{2.22}$$

则称 A 是 X 的 F 正规元. 若 A 是 X 的 F 子群,则称 A 是 X 的 F 正规子群.

定理 2.3.2 设 A 是群 X 的 F 子集,则下列条件等价

(1) A 是 X 的 F 正规元;

(2) $$\forall x, y \in X, A(xy) = A(yx); \tag{2.23}$$

(3) $$\forall x, y \in X, A(xyx^{-1}) = A(y); \tag{2.24}$$

(4) $$\forall x \in X, y_\lambda \in A, xy_\lambda x^{-1} \in A; \tag{2.25}$$

(5) $$\forall B \in F(X), AB = BA. \tag{2.26}$$

证明 (1)$\Leftrightarrow$(2)

$xA = Ax \Leftrightarrow \forall y \in X, (xA)(y) = (Ax)(y) \Leftrightarrow A(x^{-1}y) = A(yx^{-1}) \Leftrightarrow A(xy) = A(yx)$

(2)$\Leftrightarrow$(3) 在 $A(xy) = A(yx)$ 中用 yx^{-1} 代替 y 得 $A(xyx^{-1}) = A(y)$;又在 $A(xyx^{-1}) = A(y)$ 中用 yx 代替 y 得 $A(xy) = A(yx)$,所以(2)$\Leftrightarrow$(3).

(3)$\Leftrightarrow$(4) $\forall x \in X, y_\lambda \in A$,则 $A(y) \geqslant \lambda$,从而 $A(xyx^{-1}) \geqslant \lambda$,所以

$$(xyx^{-1})_\lambda = xy_\lambda x \in A.$$

因为 $x \in X, y_\lambda \in A, (xyx^{-1})_\lambda = xy_\lambda x^{-1} \in A$,即 $A(y) \geqslant \lambda$ 时, $A(xyx^{-1}) \geqslant \lambda$,即 $A(xyx^{-1}) \geqslant A(y)$. 在 $A(xyx^{-1}) \geqslant A(y)$ 中用 xyx^{-1} 代替 y,则 $A(y) \geqslant A(x^{-1}yx)$,从而 $A(y) \geqslant A(xyx^{-1})$,所以 $A(xyx^{-1}) = A(y)$.

(2)$\Leftrightarrow$(5)

$\forall x \in X, (AB)(x) = \bigvee_{y \in X}(A(y) \wedge B(y^{-1}x)) = \bigvee_{y \in X}(B(xy^{-1}) \wedge A(y)) = (BA)(x)$,所以 $AB = BA$. 令 $B = \{y^{-1}\}$,则 $\forall x \in X$,

$$(AB)(x) = (A\{y^{-1}\})(x) = \bigvee_{uv = x}(A(u) \wedge \{y^{-1}\}(v)) = A(xy)$$

$(BA)(x) = (\{y^{-1}\}A)(x) = \bigvee_{uv = x}(\{y^{-1}\}(u) \wedge A(v)) = A(yx)$. 所以

$$A(xy) = A(yx).$$

由此,定理 2.3.2 的条件(2) ~ (5)也是群 X 的 F 子群 A 是 F 正规子群的充

分必要条件. 而且条件(3)可以减弱为$\forall x,y\in X,A(xyx^{-1})\geqslant A(y)$.

定理 2.3.3 A 是群 X 的 F 正规子群的充分必要条件是 $\forall\lambda\in[0,1],A_\lambda$ 是 X 的正规子群($A_\lambda\neq\emptyset$).

证明 定理2.1.5已证 A 是 X 的 F 子群$\Leftrightarrow A_\lambda$ 是 X 的 F 子群.

因为 $\forall x\in X,(xA)_\lambda=xA_\lambda,(Ax)_\lambda=A_\lambda x$,

所以 $xA=xA\Leftrightarrow(xA)_\lambda=(Ax)_\lambda\Leftrightarrow xA_\lambda=A_\lambda x$,所以 A 是群 X 的 F 正规子群的充分必要条件是 A_λ 是 X 的正规子群.

定理 2.3.4 (1) 设 A 是群 X 的 F 正规子群, B 是 X 的 F 子群,则 AB 是 X 的 F 子群;

(2) 设 A,B 是群 X 的 F 正规子群,则 AB 是 X 的 F 正规子群.

证明 (1)因为$(AB)(AB)=A(BA)B=A(AB)B=A^2B^2=AB$,
$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}\supseteq BA=AB$,所以 AB 是 X 的 F 子群.

(2) $\forall C\in F(X)$,由于$(AB)C=A(BC)=A(CB)=(AC)B=C(AB)$,所以 AB 是 X 的 F 正规子群.

定理 2.3.5 设 A 是群 X 的 F 子群,则 $\forall a,b\in X,aA=bA$ 的充分必要条件是 $A(a^{-1}b)=A(e)$.

证明 若 $aA=bA$,则 $\forall x\in X,(aA)(x)=(bA)(x)$,即 $A(a^{-1}x)=A(b^{-1}x)$,令 $x=b$,则 $A(a^{-1}b)=A(e)$. 反之,若 $A(a^{-1}b)=A(e)$,则 $A(b^{-1}a)=A((a^{-1}b)^{-1})=A(e)$. 由此,

$$A(a^{-1}x)=A(a^{-1}bb^{-1}x)\geqslant A(a^{-1}b)\wedge A(b^{-1}x)=A(e)\wedge A(b^{-1}x)=A(b^{-1}x)$$

同理,$A(b^{-1}x)\geqslant A(a^{-1}x)$,故 $A(b^{-1}x)=A(a^{-1}x)$,所以 $aA=bA$.

设 A 是群 X 的 F 子群,令

$$\overline{A}=\{x\in X\mid A(x)=A(e)\} \tag{2.27}$$

$$A_0=\mathrm{Supp}A=\{x\in X\mid A(x)>0\}. \tag{2.28}$$

定理 2.3.6 (1)若 A 是群 X 的 F 子群,则 $\overline{A}$ 和 A_0 是 X 的子群;

(2) 若 A 是群 X 的 F 正规子群, 则 $\overline{A}$ 和 A_0 是 F 正规子群;

(3) 若 A 是群 X 的 F 子群,则 $\forall a,b\in X,aA=bA$ 的充分必要条件是 $a\overline{A}=b\overline{A}$.

证明 (1)因为 $\overline{A}=A_{A(e)}$,所以 $\overline{A}$ 是子群和正规子群的结论直接由定理2.1.5和定理2.3.3可得.

现证 A_0 也是 X 的子群和正规子群.

因为 A 是群 X 的 F 子群,则 $\forall x,y\in X,A(xy^{-1})\geqslant A(x)\wedge A(y)$. 设 $\forall x,y\in A_0$,则 $A(x)>0,A(y)>0$,故 $\exists\lambda,\mu\in(0,1]$,使得 $A(x)\geqslant\lambda,A(y)\geqslant\mu$;于是

$A(xy^{-1}) \geqslant A(x) \wedge A(y) \geqslant \lambda \wedge \mu > 0$，则 $xy^{-1} \in A_0$，所以 A_0 是 X 的子群.

(2)又因为 A 是群 X 的 F 正规子群，则 $\forall x, y \in X, A(xyx^{-1}) = A(y)$. 设 $x \in X, y \in A_0$，则 $A(y) > 0$，故 $\exists \lambda \in (0,1], A(y) > \lambda$，于是 $A(xyx^{-1}) = A(y) > \lambda > 0$，故 $xyx^{-1} \in A_0$，所以 A_0 是 X 的 F 正规子群.

(3) $aA = bA \Leftrightarrow A(a^{-1}b) = A(e) \Leftrightarrow a^{-1}b \in \overline{A} \Leftrightarrow a\overline{A} = b\overline{A}$.

设 A 是群 X 的 F 正规子群，$\overline{A}$ 是 X 的正规子群，从而 $X/\overline{A}$ 是 X 关于 $\overline{A}$ 的商群. 令

$$X/A = \{xA \mid x \in X\} \tag{2.29}$$

在 X/A 中定义运算：$\forall x, y \in X$，

$$(xA)(yA) = xyA \tag{2.30}$$

则 X/A 是半群.

定理 2.3.7　设 A 是群 X 的 F 正规子群，则 $X/\overline{A}$ 和 X/A 同构，从而 X/A 是一个群.

证明　令 $f: X/\overline{A} \to X/A, f(a\overline{A}) = aA$，由定理 2.3.6 知 f 是双射。又 $\forall x\overline{A}, y\overline{A} \in X/\overline{A}$，

$$f((x\overline{A})(y\overline{A})) = f(xy\overline{A}) = xyA = (xA)(yA) = f(x\overline{A})f(y\overline{A})$$

所以 f 是 $X/\overline{A}$ 到 X/A 的同构映射，从而 X/A 是一个群.

显然，A 是 X/A 的单位元，$\forall x \in X, xA$ 的逆元是 $x^{-1}A$.

定义 2.3.3　设 A 是群 X 的 F 正规子群，则称 $X/A = \{aA \mid a \in X\}$ 为 X 关于 A 的 F 商群.

定义 2.3.4　设 A 是有限群 X 上的 F 子群，A 在 X 中的 F 左(右)陪集集合 $\{aA \mid a \in X\}$ ($\{Aa \mid a \in X\}$)的基数称为 A 的指数，记为 $[X:A]$.

定理 2.3.8　设 A 是 n 阶群 X 上的 F 子群，则 $[X:A] \mid n$.

证明　由定理 2.3.7 知 $\{aA \mid a \in X\}$ 和 $\{a\overline{A} \mid a \in X\}$ 一一对应，即 $[X:A] = [X:\overline{A}]$，而 $[X:\overline{A}] \mid n$，所以 $[X:A] \mid n$.

定理 2.3.9　设 A 是群 X 的 F 子集，令

$$N(A) = \{x \in X \mid xA = Ax\} \tag{2.31}$$

则 $N(A)$ 是 X 的子群.

证明 显然 $e\in N(A)$. $\forall x,y\in N(A)$,则 $xA=Ax,yA=Ay$,从而 $xyA=x(yA)=x(Ay)=(xA)y=Axy$,所以 $xy\in N(A)$. 又由 $xA=Ax$ 得 $x^{-1}xAx^{-1}=x^{-1}Axx^{-1}$,故 $Ax^{-1}=x^{-1}A$,所以 $x^{-1}\in N(A)$,于是 $N(A)$ 是 X 的子群.

推论 2.3.1 设 A 是群 X 的 F 子群,则 A 是 $N(A)$ 的 F 正规子群.

定义 2.3.5 设 A 是群 X 的 F 子集,则称 $N(A)$ 是 X 关于 A 的正规化子,简称为 A 的正规化子.

定理 2.3.10 设 $f:X\to X'$ 群的满同态,则

(1)若 B 是 X' 的 F 子群(F 正规子群),则 B 的原像 $f^{-1}(B)$ 是 X 的 F 子群(F 正规子群);

(2)若 A 是 X 的 F 子群(F 正规子群),则 A 的像 $f(A)$ 是 X' 的 F 子群(F 正规子群).

证明 (1) $\forall x,y\in X$, $\exists x_1,y_1\in X'$,使得 $f(x)=x_1,f(y)=y_1$,因为

$$\begin{aligned}f^{-1}(B)(xy^{-1})&=B(f(xy^{-1}))=B(f(x)f(y^{-1}))\geqslant B(f(x))\wedge B(f(y^{-1}))\\&=B(f(x))\wedge B((f(y))^{-1})=B(f(x))\wedge B(f(y))\\&=f^{-1}(B)(x)\wedge f^{-1}(B)(y)\end{aligned}$$

所以 $f^{-1}(B)$ 是 X 的 F 子群.

又因为

$$\begin{aligned}f^{-1}(B)(xyx^{-1})&=B(f(xyx^{-1}))=B(f(x)f(y)f(x^{-1}))\\&=B(f(x)f(y)f(x)^{-1})\geqslant B(f(y))=f^{-1}(B)(y)\end{aligned}$$

所以 $f^{-1}(B)$ 是 X 的 F 正规子群.

(2) $\forall x_1,y_1\in X'$, $\exists x,y\in X_1$,使得 $f(x)=x_1,f(y)=y_1$,因为

$$\begin{aligned}f(A)(x_1y_1^{-1})&=\bigvee_{f(z)=x_1y_1^{-1}}A(z)=\bigvee_{f(z)=f(x)f(y^{-1})}A(z)=\bigvee_{f(z)=f(xy^{-1})}A(xy^{-1})\\&\geqslant\bigvee_{f(z)=f(xy^{-1})}(A(x)\wedge A(y))\\&=(\bigvee_{f(z)=f(xy^{-1})}A(x))\wedge(\bigvee_{f(z)=f(xy^{-1})}A(y))\\&=(\bigvee_{f(x)=x_1}A(x))\wedge(\bigvee_{f(y)=y_1}A(y))=f(A)(x_1)\wedge f(A)(y_1)\end{aligned}$$

所以 $f(A)$ 是 X' 的 F 子群.

又因为 $f(A)(x_1y_1x_1^{-1})=\bigvee_{z\in f^{-1}(x_1y_1x_1^{-1})}A(z)$,由于 A 是 X 的 F 正规子群,则 $\forall t\in f^{-1}(y_1),s\in f^{-1}(x_1)$,则 $s^{-1}\in f^{-1}(x_1^{-1})$,且 $A(sts^{-1})\geqslant A(t)$,而

$f(sts^{-1})=f(s)f(t)(f(s))^{-1}=x_1y_1x_1^{-1}$,从而 $sts^{-1}\in f^{-1}(x_1y_1x_1^{-1})$,所以

$$f(A)(x_1y_1x_1^{-1})=\bigvee_{z\in f^{-1}(x_1y_1x_1^{-1})}A(z)\geqslant\bigvee_{sts^{-1}\in f^{-1}(x_1y_1x_1^{-1})}A(sts^{-1})\geqslant\bigvee_{t\in f^{-1}(y_1)}A(t)=f(A)(y_1)$$

所以 $f(A)$ 是 X' 的 F 正规子群.

§2.4　模糊环与模糊理想

定义 2.4.1　设 $(X,+,\cdot)$ 是环，$A\in F(X)(A\neq\emptyset)$，若 A 满足：$\forall x,y\in X$，

(1) $$A(x+y)\geqslant A(x)\wedge A(y) \tag{2.32}$$

(2) $$A(-x)\geqslant A(x) \tag{2.33}$$

(3) $$A(xy)\geqslant A(x)\wedge A(y) \tag{2.34}$$

则称 A 是 X 的模糊子环，简称 F 子环.

显然，环 X 的子环的特征函数是 X 的 F 子环.

定理 2.4.1　环 X 的 F 子集 A 是 X 的 F 子环的充分必要条件是，$\forall x,y\in X$，

(1) $$A(x-y)\geqslant A(x)\wedge A(y) \tag{2.35}$$

(2) $$A(xy)\geqslant A(x)\wedge A(y). \tag{2.36}$$

该定理的证明由定理 2.1.3 的结论直接可得.

类似于定义 2.2.1，在环 $(X,+,\cdot)$ 的 F 子集合 $F(X)$ 中定义加法“+”和乘法“·”运算，$\forall A,B\in F(X)$，$\forall z\in X$，

$$(A+B)(z)=\bigvee_{x+y=z}(A(x)\wedge A(y)) \tag{2.37}$$

$$(A\cdot B)(z)=\bigvee_{xy=z}(A(x)\wedge A(y)) \tag{2.38}$$

分别称 F 集 $A+B$,$A\cdot B$ 为 A 和 B 的和与积，简记 $A\cdot B$ 为 AB.

特别地，对于环 X 的 F 点 x_λ,y_μ，有

$$x_\lambda+y_\mu=(x+y)_{\lambda\wedge\mu} \tag{2.39}$$

$$x_\lambda y_\mu=(xy)_{\lambda\wedge\mu} \tag{2.40}$$

类似于定义 2.2.2，在环 $(X,+,\cdot)$ 的 F 子集合 $F(X)$ 中定义 F 子集 A 的负元 $-A$ 为 $\forall x\in X$

$$(-A)(x)=A(-x) \tag{2.41}$$

特别地，对于环 X 的 F 点 x_λ 定义为

$$-x_\lambda=(-x)_\lambda \tag{2.42}$$

由此，我们可以直接由定理 2.2.6、定理 2.2.7、定理 2.2.10 和定理 2.2.11 得到下列四个 F 子环的等价定理.

定理 2.4.2　设 A 是环 X 的 F 子集，则 A 是 X 的 F 子环的充分必要条件是

(1) $$A+A\subseteq A \tag{2.43}$$

(2) $$A\subseteq -A \tag{2.44}$$

(3) $$AA\subseteq A. \tag{2.45}$$

由定理 2.2.3 知，A 是环 X 的 F 子环，则 $A+A=A$.

定理 2.4.3 设 A 是环 X 的 F 子集，则 A 是 X 的 F 子环的充分必要条件是

(1) $$A-A\subseteq A; \tag{2.46}$$

(2) $$AA\subseteq A. \tag{2.47}$$

定理 2.4.4 设 A 是环 X 的 F 子集，则 A 是 X 的 F 子环的充分必要条件是 $\forall x_\lambda, y_\mu \in A$,

(1) $$x_\lambda + y_\mu \in A \tag{2.48}$$

(2) $$-x_\lambda \in A; \tag{2.49}$$

(3) $$x_\lambda y_\mu \in A. \tag{2.50}$$

定理 2.4.5 设 A 是环 X 的 F 子集，则 A 是 X 的 F 子环的充分必要条件是 $\forall x_\lambda, y_\mu \in A$

(1) $$x_\lambda - y_\mu \in A \tag{2.51}$$

(2) $$x_\lambda y_\mu \in A. \tag{2.52}$$

定理 2.4.6 设 X 是环，$A\in F(X)$，$A\neq\emptyset$，则 A 是 X 的 F 子环的充分必要条件是 $\forall\lambda\in[0,1]$，A_λ 是 X 的子环.

该定理的证明类似于定理 2.1.5.

定理 2.4.7 设 A 是环 X 的子环，则

(1) $$\overline{A}=\{x\in X \mid A(x)=A(0)\} \tag{2.53}$$

(2) $$A_0=\mathrm{Supp}A=\{x\in X \mid A(x)>0\} \tag{2.54}$$

都是 X 的子环.

该定理的证明类似于定理 2.3.6，从略.

定理 2.4.8 设 $\{A_t\}_{t\in T}$ 是环 X 的一簇 F 子环，则 $\bigcap\limits_{t\in T} A_t$ 也是 X 的 F 子环.

证明 由定理 2.4.4，只需证，$\forall x_\lambda, y_\mu \in \bigcap\limits_{t\in T} A_t$ 有

$$x_\lambda + y_\mu \in \bigcap_{t\in T} A_t,\ -x_\lambda \in \bigcap_{t\in T} A_t,\ x_\lambda y_\mu \in \bigcap_{t\in T} A_t.$$

事实上，由 $x_\lambda, y_\mu \in \bigcap\limits_{t\in T} A_t$. 得

$$\Big(\bigcap_{t\in T} A_t\Big)(x)=\bigwedge_{t\in T} A_t(x)\geqslant\lambda,\ \Big(\bigcap_{t\in T} A_t\Big)(y)=\bigwedge_{t\in T} A_t(y)\geqslant\mu$$

所以 $\forall t\in T$，$A_t(x)\geqslant\lambda$，$A_t(y)\geqslant\mu$，即 $\forall t\in T$，$x_\lambda\in A_t$，$y_\mu\in A_t$.

由于 A_t 是 X 的 F 子环，则 $\forall t\in T$，$x_\lambda+y_\mu\in A_t$，$-x_\lambda\in A_t$，$x_\lambda y_\mu\in A_t$。所以 $x_\lambda+y_\mu\in\bigcap\limits_{t\in T} A_t$，$-x_\lambda\in\bigcap\limits_{t\in T} A_t$，$x_\lambda y_\mu\in\bigcap\limits_{t\in T} A_t$.

由此 $\bigcap\limits_{t\in T} A_t$ 是 X 的 F 子环.

定义 2.4.2 设 A 是环 X 的 F 子环，若 A 满足，$\forall x,y\in X$,

$$A(xy)\geqslant A(y)\quad (A(yx)\geqslant A(y)) \tag{2.55}$$

则称 A 是 X 的 F 左理想(F 右理想),若 A 既是 X 的 F 左理想,又是 X 的 F 右理想,则称 A 是 X 的 F 理想.

显然,设 A 是环 X 的 F 子环,若 A 满足:

$$A(xy) \geqslant A(x) \vee A(y) \tag{2.56}$$

则 A 是 X 的 F 理想.

定义 2.4.3　设 A 是环 X 的 F 子集,定义 $\forall x,y \in X$,

$$(xA)(xy) = A(y) \tag{2.57}$$

定理 2.4.9　设 A 是环 X 的 F 子环,则下列条件等价:

(1) A 是 X 的 F 理想;

(2) $\forall x \in X, xA \subseteq A, Ax \subseteq A$;

(3) $\forall x \in X, y_\lambda \in A$,则 $xy_\lambda \in A, y_\lambda x \in A$.

证明　(1)$\Rightarrow$(2)　已知 $A(xy) \geqslant A(y), A(yx) \geqslant A(y)$. 因为
$(xA)(xy) = A(y), (Ax)(yx) = A(y)$,故 $A(xy) \geqslant (xA)(xy), A(yx) \geqslant (Ax)(yx)$
即　$xA \subseteq A, Ax \subseteq A$.

(2)$\Rightarrow$(3)　已知 $\forall x \in X, xA \subseteq A, Ax \subseteq A$。$\forall y_\lambda \in A$,则 $A(y) \geqslant \lambda$,又
$A(xy) \geqslant (xA)(xy) = A(y) \geqslant \lambda, A(yx) \geqslant (Ax)(yx) = A(y) \geqslant \lambda$,故 $xy_\lambda \in A, y_\lambda x \in A$.

(3)$\Rightarrow$(1)　已知 $\forall x \in X, y_\lambda \in A$,则 $xy_\lambda \in A, y_\lambda x \in A$.

假若 $\exists x', y' \in X$,使 $A(x'y') < A(y'), A(y'x') < A(y')$,令 $\lambda' = \frac{1}{2}(A(x'y') + A(y'))$,则 $A(y') > \lambda', A(x'y') < \lambda'$,即 $y'_{\lambda'} \in A$,而 $(x'y')_{\lambda'} = x'y'_{\lambda'} \notin A$,与已知条件矛盾.

故 $\forall x,y \in X, A(xy) \geqslant A(y), A(yx) \geqslant A(y)$,即 A 是 X 的 F 理想.

定理 2.4.10　设 X 是环,$A \in F(X), A \neq \emptyset$,则 A 是 X 的 F 理想的充分必要条件是 $\forall x,y \in X$,

(1)
$$A(x-y) \geqslant A(x) \wedge A(y); \tag{2.58}$$

(2)
$$A(xy) \geqslant A(x) \vee A(y) \tag{2.59}$$

定理的结论直接由定义 2.4.2 可得.

由定理 2.4.3,定理 2.4.5 和定理 2.4.9 可得下列定理.

定理 2.4.11　设 X 是环,$A \in F(X), A \neq \emptyset$,则 A 是 X 的 F 理想的充分必要条件是

(1)
$$A - A \subseteq A; \tag{2.60}$$

(2)
$$xA \subseteq A, Ax \subseteq A \quad (x \in X) \tag{2.61}$$

定理 2.4.12　设 X 是环,$A \in F(X), A \neq \emptyset$,则 A 是 X 的 F 理想的充分必要条件是 $\forall x_\lambda, y_\mu \in A$,

(1) $$x_\lambda - y_\mu \in A; \tag{2.62}$$

(2) $$\forall x \in X, xy_\mu \in A, y_\mu x \in A \tag{2.63}$$

定理 2.4.13 设$\{A_t\}_{t\in T}$是环 X 的一簇 F 理想,则$\bigcap\limits_{t\in T} A_t$ 也是 X 的 F 理想.

证明 定理2.4.8已证$\bigcap\limits_{t\in T} A_t$ 也是 X 的 F 子环.

又因为$\left(\bigcap\limits_{t\in T} A_t\right)(xy) = \bigwedge\limits_{t\in T} A_t(xy) \geqslant \bigwedge\limits_{t\in T} A_t(y) = \left(\bigcap\limits_{t\in T} A_t\right)(y)$,则$\bigcap\limits_{t\in T} A_t$ 是 X 的 F 左理想. 同理证它是 X 的 F 右理想,所以$\bigcap\limits_{t\in T} A_t$ 也是 X 的 F 理想.

定理 2.4.14 设 X 是环, $A \in F(X)$, $A \neq \emptyset$,则 A 是 X 的 F 理想的充分必要条件是$\forall \lambda \in [0,1]$, A_λ 是 X 的理想.

证明 A 是 F 子环的情况定理2.4.6已证.

设 A 是 X 的 F 理想, $\forall x \in X, y \in A_\lambda$,即 $A(y) \geqslant \lambda$,又 $A(xy) \geqslant A(y) \geqslant \lambda$,故 $xy \in A_\lambda$, $yx \in A_\lambda$,所以 A_λ 是 X 的理想.

反之,设 A_λ 是 X 的理想,则 $\forall x \in X, y \in A_\lambda, xy \in A_\lambda, yx \in A_\lambda$. 假若 A 不是 X 的 F 理想,则$\exists x', y' \in X$,使 $A(x'y') < A(y')$, $A(y'x') < A(y')$,令 $\lambda = \frac{1}{2}(A(x'y') + A(y'))$,则 $A(y') > \lambda$, $A(x'y') < \lambda$,即 $x'y' \notin A_\lambda$,而 $y' \in A_\lambda$ 与 A_λ 是理想矛盾, A 是 X 的 F 理想. 故$\forall x, y \in X, A(xy) \geqslant A(y), A(yx) \geqslant A(y)$,即 A 是 X 的 F 理想.

定理 2.4.15 设 A 是环 X 的 F 理想,则

(1) $\overline{A}$ 是 X 的理想;

(2) $A_0 = \mathrm{Supp}A$ 是 X 的理想.

证明 (1) 因为 $\overline{A} = \{x \in X \mid A(x) = A(0)\} = A_{A(0)}$,即 $\overline{A}$ 是 A 的 $A(0)$截集,所以 $\overline{A}$ 是 X 的理想.

(2) 由定理2.4.7知 $\mathrm{Supp}A_0$ 是 X 的子环.

$\forall x \in X, y \in A_0$,则 $A(y) > 0$. 又 A 是环 X 的 F 理想,则

$$A(xy) \geqslant A(y) > 0, A(yx) \geqslant A(y) > 0$$

所以 $xy \in A_0$, $yx \in A_0$,于是 A_0 是 X 的理想.

定理 2.4.16 设$f: X \to X'$环的满同态映射,则

(1)若 B 是 X'的 F 子环(F 理想),则 B 的原像$f^{-1}(B)$是 X 的 F 子环(F 理想);

(2)若 A 是 X 的 F 子环(F 理想),则 A 的像$f(A)$是 X'的 F 子环(F 理想).

证明 只证明 F 理想的情况, F 子环的情况同理可证.

(1) $\forall x, y \in X$, $\exists x', y' \in X'$,使得$f(x) = x'$, $f(y) = y'$,则

$f^{-1}(B)(x-y) = B(f(x-y)) = B(f(x) - f(y)) \geqslant B(f(x)) \wedge B(f(y))$

$$=f^{-1}(B)(x)\wedge f^{-1}(B)(y)$$

$$f^{-1}(B)(xy)=B(f(xy))=B(f(x)f(y))\geqslant B(f(x))\vee B(f(y))$$
$$=f^{-1}(B)(x)\vee f^{-1}(B)(y)$$

所以$f^{-1}(B)$是X的F理想.

(2) $\forall x',y'\in X'$, $\exists x,y\in X$,使得$f(x)=x'$,$f(y)=y'$,则

$$f(A)(x'-y')=\bigvee_{f(z)=x'-y'}A(z)=\bigvee_{f(z)=f(x)-f(y)}A(z)=\bigvee_{f(z)=f(x-y)}A(z)=\bigvee_{f(z)=f(x-y)}A(x-y)$$
$$\geqslant\bigvee_{f(z)=f(x-y)}(A(x)\wedge A(y))=(\bigvee_{f(x)=x'}A(x))\wedge(\bigvee_{f(y)=y'}A(y))$$
$$=f(A)(x')\wedge f(A)(y')$$

$$f(A)(x'y')=\bigvee_{f(z)=x'y'}A(z)=\bigvee_{f(z)=f(x)f(y)}A(z)=\bigvee_{f(z)=f(xy)}A(z)=\bigvee_{f(z)=f(xy)}A(xy)$$
$$\geqslant\bigvee_{f(z)=f(xy)}(A(x)\vee A(y))=(\bigvee_{f(x)=x'}A(x))\vee(\bigvee_{f(y)=y'}A(y))$$
$$=f(A)(x')\vee f(A)(y')$$

所以$f(A)$是X'的F理想.

定理 2.4.17 设X是除环,o,e分别是X的零元和单位元,则X的F子集$A(A\neq\emptyset)$是X的F理想的充分必要条件是$\forall x\in X,x\neq o$,有

$$A(x)=A(e)\leqslant A(o) \tag{2.64}$$

证明 (必要性) 因$A(o)=A(e-e)\geqslant A(e)\wedge A(e)=A(e)$,又若$x\neq o$,有$A(x)=A(xe)\geqslant A(e)$,$A(e)=A(x^{-1}x)\geqslant A(x)$,故$\forall x\in X$,$A(x)=A(e)\leqslant A(o)$.

(充分性) 首先$\forall x,y\in X$,若$x\neq y$,有$A(x-y)=A(e)=A(x)\wedge A(y)$
若$x=y$,则$A(x-y)=A(o)\geqslant A(x)\wedge A(y)$,即$\forall x,y\in X$,$A(x-y)\geqslant A(x)\wedge A(y)$成立.

其次,$\forall x,y\in X$,若$x=o$或$y=o$有$A(xy)=A(o)\geqslant A(x)\vee A(y)$
若$x\neq o,y\neq o$,则$A(xy)=A(e)=A(x)\vee A(y)$,即$\forall x,y\in X$,$A(xy)\geqslant A(x)\vee A(y)$成立,所以$A$是$X$的$F$理想.

定义 2.4.4 设A是环X的F理想, $\forall x\in X$,称$x+A(A+x)$为X关于F剩余类,记为X/A,即

$$X/A=\left\{x+A\mid x\in X\right\} \tag{2.65}$$

显然,对于环X的F理想A,$x+A=A+x$.

定理 2.4.18 设A是环X的F理想, $\forall x,y\in X$,有

$$x+A=y+A\Leftrightarrow A(x-y)=A(o) \tag{2.66}$$

证明(必要性) $\forall x,y\in X$, 有

$A(x-y)=(A+y)(x)=(y+A)(x)=(x+A)(x)=A(-x+x)=A(o)$

(充分性) $\forall z\in X$,有

$$(x+A)(z)=A(-x+z)=A((z-y)-(x-y))\geqslant A(z-y)\wedge A(x-y)$$
$$=A(z-y)\wedge A(o)=A(z-y)=(A+y)(z)=(y+A)(z)$$

故 $y+A\subseteq x+A$，同理 $x+A\subseteq y+A$，所以 $y+A=x+A$.

定理 2.4.19 设 A 是环 X 的 F 理想，则 $\forall x,y\in X$，有

$$(x+A)+(y+A)=(x+y)+A \tag{2.67}$$

称为 X/A 的加法，从而代数系统 $(X/A,+)$ 是一个加群.

证明 因为 $A+A=A$，所以 $(x+A)+(y+A)=(x+y)+A$.

显然 A 是 $(X/A,+)$ 的零元，$-x+A$ 是 $x+A$ 的负元，所以 $(X/A,+)$ 是一个加群.

在 X/A 中定义乘法运算，$\forall x,y\in X$

$$(x+A)(y+A)=xy+A \tag{2.68}$$

设 $x_1+A=x+A,y_1+A=y+A$，由定理 2.4.18 知 $A(x_1-x)=A(o)=A(y_1-y)$，所以

$$\begin{aligned}A(x_1y_1-xy)&=A(x_1y_1-xy_1+xy_1-xy)\\&\geqslant A((x_1-x)y_1)\wedge A(x(y_1-y))\\&\geqslant A(x_1-x)\wedge A(y_1-y)\\&=A(o)\wedge A(o)=A(o)\end{aligned}$$

又因为 $A(x_1y_1-xy)\leqslant A(0)$，故 $A(x_1y_1-xy)=A(0)$.

从而 $x_1y_1+A=xy+A$，即 $(x_1+A)(y_1+A)=(x+A)(y+A)$，所以 X/A 关于乘法运算一意.

由于 X 是环，不难验证 X/A 关于乘法有结合律和乘法对加法的分配律. 由此得定理.

定理 2.4.20 设 A 是环 X 的 F 理想，则 X 关于 A 的剩余类 X/A 关于加法和乘法构成一个环.

定义 2.4.5 设 A 是环 X 的 F 理想，则 X 关于 A 的剩余类构成的环 $(X/A,+,\cdot)$ 称为 X 关于 A 的商环.

设 A 是环 X 的 F 理想，令

$$\varphi:X\to X/A,\varphi(x)=x+A$$

显然 φ 是一个满射，且 $\forall x,y\in X$，

$$\varphi(x+y)=(x+y)+A=(x+A)+(y+A)=\varphi(x)+\varphi(y)$$
$$\varphi(xy)=xy+A=(x+A)(y+A)=\varphi(x)\varphi(y)$$

由此,环$(X,+,\cdot)$和$\left(X/A,+,\cdot\right)$满同态,且称φ为自然同态.

定理 2.4.21　设f是环X到X'的满同态,o'是X'零元,$\forall\lambda\in[0,1]$,称$f^{-1}(o'_\lambda)$为f的F-λ同态核,记为K_λ,则K_λ是X的F理想,且$X/K_\lambda\cong X'$.

证明　因为$o'_\lambda+o'_\lambda=o'_\lambda, o'_\lambda o'_\lambda=o'_\lambda, -o'_\lambda=o'_\lambda$,所以$o'_\lambda$是$X'$的$F$子环,又因为$\forall x'\in X'$,有$x'o'_\lambda=(x'o')_{1\wedge\lambda}=o'_\lambda=o'_\lambda x'$,故$o'_\lambda$是$X'$的$F$理想,由定理2.4.16知$K_\lambda=f^{-1}(o'_\lambda)$是$X$的$F$理想.

现证$X/K_\lambda\cong X'$. $\forall x\in X$,若$f(x)=x'$,令

$$\varphi:X\to X/K_\lambda,\varphi(x)=x+K_\lambda$$

$$g:X/K_\lambda\to X',g(x+K_\lambda)=x'$$

由此得　$g\circ\varphi=f$,由于f和φ都是满同态,则g也是满同态.

最后证g是单射. 设$x'=y'$,即$f(x)=f(y)$,则

$$f(x)-f(y)=f(x-y)=o'$$

故$K_\lambda(x-y)=f^{-1}(o'_\lambda)(x-y)=o'_\lambda(f(x-y))=o'_\lambda(o')=\lambda=K_\lambda(o)$

由定理2.4.18知$x+K_\lambda=y+K_\lambda$,所以g是同构映射,即$X/K_\lambda\cong X'$.

§2.5　模糊素理想与模糊极大理想

定义 2.5.1　设A是交换环X的F理想,若$\forall x,y\in X$,有

$$A(xy)=A(x)\text{或}A(xy)=A(y)\tag{2.69}$$

则称A是X的F素理想.

定理 2.5.1　设A是交换环X的F理想,$\forall x,y\in X$,有$A(xy-x)=A(0)$或$A(xy-y)=A(0)$,则A是X的F素理想.

证明　因为A是X的F理想,则$A(xy)\geqslant A(x), A(xy)\geqslant A(y)$,又$A(xy-x)=A(0)$,故

$$A(x)=A(-x)=A(xy-x-xy)\geqslant A(xy-x)\wedge A(xy)=A(o)\wedge A(xy)=A(xy)$$

即$A(x)\geqslant A(xy)$,由此$A(xy)=A(x)$,同理$A(xy)\geqslant A(y)$时,$A(xy)=A(y)$,所以A是X的F素理想.

定理 2.5.2　设A是交换环X的F理想,则A是X的F素理想的充分必要

条件是,当 $x_\lambda y_\mu \in A$ 时 $x_{\lambda\wedge\mu}\in A$ 或 $y_{\lambda\wedge\mu}\in A$.

证明(必要性) 设 A 是 X 的 F 素理想,则 $\forall x,y\in X, A(xy)=A(x)$ 或 $A(xy)=A(y)$,若 $x_\lambda y_\mu\in A$,则 $(xy)_{\lambda\wedge\mu}=x_\lambda y_\mu\in A$,故 $A(xy)\geqslant\lambda\wedge\mu$,于是 $A(x)\geqslant\lambda\wedge\mu$ 或 $A(y)\geqslant\lambda\wedge\mu$,即 $(x)_{\lambda\wedge\mu}\in A$ 或 $(y)_{\lambda\wedge\mu}\in A$.

(充分性)已知 $x_\lambda y_\mu\in A$ 时,$x_{\lambda\wedge\mu}\in A$ 或 $y_{\lambda\wedge\mu}\in A$,令 $A(xy)=b$,于是 $(xy)_b\in A$,即 $x_b y_b\in A$,从而 $x_b\in A$ 或 $y_b\in A$,即 $A(x)\geqslant b$ 或 $A(y)\geqslant b$,而 $b=A(xy)\geqslant A(x)\vee A(y)$,故 $A(x)=b$ 或 $A(y)=b$,即 $A(xy)=A(x)$ 或 $A(xy)=A(y)$,所以 A 是 X 的 F 素理想.

定理 2.5.3 设 A 是交换环 X 的 F 理想,则 A 是 X 的 F 素理想的充分必要条件是 $\forall\lambda\in[0,1]$,若 $A_\lambda\neq\emptyset$ 时,A_λ 是 X 的素理想.

证明(必要性) 已知 A 是 X 的 F 素理想,即 $\forall x,y\in X, A(xy)=A(x)$ 或 $A(xy)=A(y)$. 因为 A 是 X 的 F 理想,则 A_λ 是 X 的理想。若 $xy\in A_\lambda$,则 $A(xy)\geqslant\lambda$,从而 $A(x)\geqslant\lambda$ 或 $A(y)\geqslant\lambda$,即 $x\in A_\lambda$ 或 $y\in A_\lambda$,所以 A_λ 是 X 的素理想.

(充分性)因为 A 是 X 的 F 理想,则 $\forall x,y\in X, A(xy)\geqslant A(x)$ 或 $A(xy)\geqslant A(y)$. 假若 $\exists x_0,y_0\in X$,使 $A(x_0y_0)>A(x_0), A(x_0y_0)>A(y_0)$. 令 $\lambda_0=A(x_0y_0)$,则 $x_0y_0\in A_{\lambda_0}$ 且 $A_{\lambda_0}\neq\emptyset$,而 $x_0\notin A_{\lambda_0}, y_0\notin A_{\lambda_0}$,这与 A_{λ_0} 是素理想矛盾,所以 $\forall x,y\in X, A(xy)=A(x)$ 或 $A(xy)=A(y)$,即 A 是 X 的 F 素理想.

定理 2.5.4 设 A 是交换环 X 的 F 理想,若 $\forall\lambda\in[0,1], A_\lambda\neq\emptyset$ 时,A 是 X 的 F 素理想,则:

(1) $\overline{A}$ 是 X 的素理想;

(2) $A_0=\mathrm{Supp}A$ 是 X 的素理想.

证明 (1)因为 $\overline{A}=A_{A(0)}$,即 $\overline{A}$ 是 A 的 $A(0)$ 截集,由定理 2.5.3 知 $\overline{A}$ 是 X 的素理想.

(2) 由定理 2.4.15 知 A_0 是 X 的理想.

设 $xy\in A_0$,则 $A(xy)>0$, $\exists\lambda\in(0,1]$,使 $A(xy)\geqslant\lambda>0$,则 $(xy)_\lambda=x_\lambda y_\lambda\in A$,由于 A 是 X 的素理想,则 $x_\lambda\in A$ 或 $y_\lambda\in A$,由此 $A(x)\geqslant\lambda>0, A(y)\geqslant\lambda>0$,即 $x\in A_0$ 或 $y\in A_0$,所以 A_0 是 X 的素理想.

定理 2.5.5 设 f 是交换环 X 到交换环 X' 的满同态映射,则:

(1)若 B 是 X' 的 F 素理想,则 B 的原像 $f^{-1}(B)$ 是 X 的 F 素理想;

(2)若 A 是 X 的 F 素理想,则 A 的像 $f(A)$ 是 X' 的 F 素理想.

证明 由定理 2.4.16 知,$f^{-1}(B)$ 和 $f(A)$ 均为 F 理想.

(1) $\forall x,y\in X, \exists x',y'\in X'$,使得 $f(x)=x', f(y)=y'$,则:

$$f^{-1}(B)(xy)=B(f(xy))=B(f(x)f(y))$$

因为 B 是素理想,则 $B(f(x)f(y))=B(f(x))$ 或 $B(f(x)f(y))=B(f(y))$

即$f^{-1}(B)(xy)=B(f(x))=f^{-1}(B)(x)$，或$f^{-1}(B)(xy)=B(f(y))=f^{-1}(B)(y)$，所以$f^{-1}(B)$是$X$的$F$素理想.

(2) $\forall x',y'\in X'$, $\exists x,y\in X$，使得$f(x)=x'$，$f(y)=y'$，则

$$f(A)(x'y')=\bigvee_{f(z)=x'y'}A(z)=\bigvee_{f(z)=f(x)f(y)}A(z)=\bigvee_{f(z)=f(xy)}A(xy)$$

因为A是X的F素理想，则$A(xy)=A(x)$或$A(xy)=A(y)$，从而

$$f(A)(x'y')=\bigvee_{f(z)=f(xy)}A(x)=\bigvee_{f(x)=x'}A(x)=f(A)(x')$$

或

$$f(A)(x'y')=\bigvee_{f(z)=f(xy)}A(y)=\bigvee_{f(y)=y'}A(y)=f(A)(y')$$

所以$f(A)$是X'的F素理想.

下面我们介绍F弱素理想和F极大理想.

定义 2.5.2 设A,B是环X的F子环，且$B\subseteq A$，则称B是A的F子环。若B是A的F子环，且$\forall a_\lambda\in A$，有

$$a_\lambda B\subseteq B\quad (Ba_\lambda\subseteq B) \tag{2.70}$$

则称B是A的F左理想(F右理想)；若B既是A的F左理想，又是A的F右理想，则称B是A的F理想.

定理 2.5.6 设A是环X的F子环，若B是A的F理想，则$\mathrm{Supp}B$是$\mathrm{Supp}A$的理想.

证明 由定理2.4.7知$\mathrm{Supp}B$，$\mathrm{Supp}A$均为X的子环，显然$\mathrm{Supp}B$是$\mathrm{Supp}A$的子环.

$\forall a\in\mathrm{Supp}A$，$b\in\mathrm{Supp}B$，则$A(a)>0$，$B(b)>0$，$\exists\lambda,\mu\in(0,1]$，使$A(a)\geqslant\lambda>0$，$B(b)\geqslant\mu>0$，即$a_\lambda\in A$，$b_\mu\in B$，由于$B$是$A$的$F$理想，则$a_\lambda B\subseteq B$，$Ba_\lambda\subseteq B$，故$a_\lambda b_\mu\in B$，$b_\mu a_\lambda\in B$，从而$(ab)_{\lambda\wedge\mu}\in B$，$(ba)_{\lambda\wedge\mu}\in B$，故$B(ab)\geqslant\lambda\wedge\mu>0$，$B(ba)\geqslant\lambda\wedge\mu>0$于是$ab\in\mathrm{Supp}B$，$ba\in\mathrm{Supp}B$，所以$\mathrm{Supp}B$是$\mathrm{Supp}A$的理想.

定义 2.5.3 设A是环X的F子环，B是A的F理想，若$\mathrm{Supp}A=\mathrm{Supp}B$，则称$B$是$A$的$F$单位理想；若$\mathrm{Supp}B=\{o\}$，则称$B$是$A$的$F$零理想.

定义 2.5.4 设A是交换环X的F子环，B是A的F理想，若$\forall a_\lambda,b_\mu\in A$ $(\lambda>0,\mu>0)$，$a_\lambda b_\mu\in B$，则$\exists 0<\lambda'\leqslant\lambda$，$0<\mu'\leqslant\mu$，使$a_{\lambda'}\in B$或$b_{\mu'}\in B$，则称$B$是$A$的$F$弱素理想.

特别地，若B是交换环X的F理想，$\forall a,b\in X$，若$a_\lambda b_\mu\in B$，则$\exists 0<\lambda'\leqslant\lambda$，$0<\mu'\leqslant\mu$，使$a_{\lambda'}\in B$或$b_{\mu'}\in B$，则称$B$是$X$的$F$弱素理想.

由定理2.5.2立即可得下面定理.

定理 2.5.7 交换环X的素理想定是X的弱素理想.

定理 2.5.8 设A是交换环X的F子环，B是A的F理想，则B是A的F弱素理想的充分必要条件是$\mathrm{Supp}B$是$\mathrm{Supp}A$的素理想.

证明(必要性) $\forall a,b\in \text{Supp}A$,若 $ab\in \text{Supp}B$,即 $B(ab)>0$,则 $\exists \lambda\in(0,1]$,使 $B(ab)\geqslant\lambda>0$,故 $a_\lambda b_\lambda=(ab)_\lambda\in B$,因为 B 是 A 的 F 弱素理想,则 $\exists 0<\lambda'\leqslant\lambda,0<\mu'\leqslant\mu$,使 $a_{\lambda'}\in B$ 或 $b_{\mu'}\in B$,即 $B(a)\geqslant\lambda'>0,B(b)\geqslant\mu'>0$,从而 $a\in \text{Supp}B$ 或 $b\in\text{Supp}B$,故 $\text{Supp}B$ 是 $\text{Supp}A$ 的素理想.

(充分性) $\forall a_\lambda,b_\mu\in A$,若 $a_\lambda b_\mu\in B$,即 $(ab)_{\lambda\wedge\mu}\in B$,因 $\lambda>0,\mu>0$,则 $ab\in \text{Supp}B$. 由于 $\text{Supp}B$ 是 $\text{Supp}A$ 的素理想,则 $a\in\text{Supp}B$ 或 $b\in\text{Supp}B$,从而 $\exists 0<\lambda'\leqslant\lambda,0<\mu'\leqslant\mu,B(a)\geqslant\lambda'$或 $B(b)\geqslant\mu'$,故 $a_{\lambda'}\in B$ 或 $b_{\mu'}\in B$,所以 B 是 A 的 F 弱素理想.

推论 2.5.1 设 A 是交换环 X 的 F 理想,则 A 是 X 的 F 弱素理想的充分必要条件是 $\text{Supp}A$ 是 X 的素理想.

类似地,我们用承集定义 F 极大理想.

定义 2.5.5 设 A 是环 X 的 F 子环, B 是 A 的 F 理想, 若 $\text{Supp}B$ 是 $\text{Supp}A$ 的极大理想,则称 B 是 A 的 F 极大理想.

特别地,若 $\text{Supp}B$ 是环 X 的极大理想,则称 B 是 X 的 F 极大理想.

定理 2.5.9 设 A 是环 X 的 F 子环, B 是 X 的 F 理想,则 B 是 A 的 F 极大理想的充分必要条件是:

(1) $\text{Supp}B\neq\text{Supp}A$;

(2) C 是 A 的 F 理想,且 $C\supseteq B$,若 $\text{Supp}B\neq\text{Supp}C$,则 $\text{Supp}C=\text{Supp}A$.

定理的证明直接由定义 2.5.5 可得.

在经典环论中,在环与其极大理想之间不存在其他真理想,而在 F 环中,环与其 F 极大理想之间还存在无穷多个 F 理想. 可以从下面定理得到.

定理 2.5.10 设 A 是环 X 的 F 理想,且 $A\neq X$,则存在 X 的 F 理想 $B,B\neq X$,且 B 真包含 A.

证明 若 $\forall x\in\text{Supp}A,A(x)=1$,此时因 $A\neq X$,则 $\exists x\in X$,使 $x\notin\text{Supp}A$,则令

$$B(x)=\begin{cases}A(x),x\in\text{Supp}A\\ \lambda_0,x\notin\text{Supp}A\end{cases}\quad(0<\lambda_0<1)$$

易证 B 是 X 的 F 理想,且 $B\supset A$.

若 $\exists x\in\text{Supp}A,A(x)\neq 1$,取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<1-\inf\limits_{x\in\text{Supp}A}A(x)$,则令

$$B(x)=(A(x)+\varepsilon_0)\wedge 1$$

则 B 是 X 的 F 理想,且 $B\supset A$.

定理 2.5.11 设 X 是有单位元 e 的交换环, A 是 X 的 F 子环,若 $A(e)>0$,则 A 的每一个 F 极大理想都是 A 的 F 弱素理想.

证明 由 $A(e)>0$ 知 $e\in\text{Supp}A$,故 $\text{Supp}A$ 是有单位元的交换环. 因为 B 是 A 的 F 极大理想,则 $\text{Supp}B$ 是 $\text{Supp}A$ 的极大理想,由经典环论知 $\text{Supp}B$ 是 $\text{Supp}A$ 的素理想,所以 B 是 A 的 F 弱素理想.

第三章　幂群与模糊幂群

§3.1　幂　　群

设$(G,\cdot)$是群,$P(G)$是G的幂集,在$P(G)-\{\emptyset\}$中引入运算,$\forall A,B\in P(G)-\{\emptyset\}$

$$A\cdot B\triangleq\{a\cdot b\mid a\in A,b\in B\}\tag{3.1}$$

简记$a\cdot b=ab$,$A\cdot B=AB$,$\{a\}\cdot B=aB$.

显然,$P(G)-\{\emptyset\}$是有单位元$\{e\}$的半群,其中e是G的单位元.

定义 3.1.1　设$g\subseteq P(G)-\{\emptyset\}$,若$g$关于运算(3.1)构成一群,则称$g$是$G$上的一个幂群.其单位元用$E$表示,$A$的逆元用$A^{-1}$表示.

显然,群G关于其正规子群N的商群G/N是G上的一个幂群.

例 3.1.1　设非零实数乘群$(\mathbf{R}_0,\cdot)$,取$E=(0,1)$,$A=(-1,0)$,则$g=\{E,A\}$是$\mathbf{R}_0$上的一个幂群.

定理 3.1.1　设g是群G上的幂群,则:

(1) $\forall A\in g$,$|A|=|E|$;

(2) $\forall A,B\in g$,若$A\cap B\neq\emptyset$,则$|A\cap B|=|E|$.

证明　(1) 因为$AE=A$,则$\forall a\in A$,$aE\subseteq A$,于是$|E|=|aE|\leqslant|A|$;另外,$A^{-1}A=E$,则$\forall b\in A^{-1}$,$bA\subseteq E$,于是$|A|=|bA|\leqslant|E|$,所以$|A|=|E|$.

(2) 若$c\in A\cap B$,则$cE\subseteq A$,$cE\subseteq B$,从而$cE\in A\cap B$,即$|E|=|cE|\leqslant|A\cap B|$,又因为$|A\cap B|\leqslant|A|=|E|$,所以$|A\cap B|=|E|$.

设g是群G上的幂群,记

$$G^{*}\triangleq\cup\{A\mid A\in g\}\tag{3.2}$$

定理 3.1.2(结构定理 1)　设g是群G上的幂群,则:

(1) E和G^{*}是G的子半群;

(2) 若E是G的独异点,则G^{*}是G的独异点;

(3) 若E是G的子群,则G^{*}是G的子群.

证明 (1) 由于$E^2=E$,所以E是G的子半群.

$\forall a,b\in G^*$,$\exists A,B\in g$,使得$a\in A,b\in B$,则$ab\in AB\in g$,即$ab\in G^*$,所以G^*是G的子半群.

(2) 由于E是G的独异点,则$e\in E\subseteq G^*$,所以G^*是G的独异点.

(3) $\forall a\in G^*$,$\exists A\in g$,使得$a\in A$。由$AA^{-1}=E$,且$e\in E$知,$\exists b\in A,b^{-1}\in A^{-1}$,使得$bb^{-1}=e$,由此$ab^{-1}\in AA^{-1}=E$,则$\exists h\in E$,使得$ab^{-1}=h$,即$a=hb$,从而$a^{-1}=b^{-1}h^{-1}\in A^{-1}E=A^{-1}\in g$,故$a^{-1}\in G^*$,又$e\in E\subseteq G^*$,所以$G^*$是$G$的子群.

推论 3.1.1 若g是有限群G上的幂群,则E和G^*都是G的子群.

定理 3.1.3 设g是群G上的幂群,则$e\notin G^*$的充分必要条件是$\forall a\in G^*$,则$a^{-1}\notin G^*$.

证明略.

注 例 3.1.1 说明,存在$e\notin G^*$的幂群.

定义 3.1.2 设H是群G的子群,若$E\subseteq P(G)-\{\emptyset\}$满足:$\forall a\in H,aE=Ea$,则称$E$关于$H$正规.若$E$是$G$的子半群(独异点、子群),则称$E$是$G$的关于$H$的正规子半群(正规独异点、正规子群).

定理 3.1.4(构造定理 1) 设H是群G的子群,E是G的关于H的正规子半群,且$E^2=E$,则

$$g\triangleq\{aE\mid a\in H\} \tag{3.3}$$

是G上的一个幂群.

证明 $\forall aE,bE\in g$,则$(aE)(bE)=a(Eb)E=abE^2=abE\in g$,又$E$是$g$的单位元,$a^{-1}E$是$aE$的逆元,所以$g$是$G$上的幂群.

例 3.1.2 设实数加群$(R,+)$,取$E=(0,+\infty)$,显然E是R的子半群,则:

(1)$g_1=\{E\}$是R上的幂群;

(2)$g_2=\{E+i\mid i\in\mathbf{Z}\}$是$R$上的幂群,其中$(\mathbf{Z},+)$是整数加群。

注 例 3.1.2 的(2)说明,存在$e\notin E,e\in G^*$的幂群.

定义 3.1.3 设g是群G上的幂群,

(1) 若E是G的独异点,则称g是G的正规幂群;

(2) 若E是G的子群,则称g是G的一致幂群.

由定理 3.1.2 知,E是G的子半群,所以$e\in E$的幂群是正规幂群.

定理 3.1.5 (1)有限群上的幂群是一致幂群;

(2)单位元是有限集的幂群是一致幂群.

设g是G上的幂群,记

$$\overline{A} \triangleq \{a \in A \mid a^{-1} \in A^{-1}\} \tag{3.4}$$

$$\overline{G} \triangleq \cup \{\overline{A} \mid A \in g\} \tag{3.5}$$

称 $\overline{A}$ 是 A 的核，$\overline{G}$ 是 G^* 的核.

特别地
$$\overline{E} = \{a \in E \mid a^{-1} \in E\} \tag{3.6}$$

显然，(1) $\overline{E}$ 是群 G 的子群；

(2) 若 $e \in E$，则 $\forall A \in g, \overline{A} \neq \emptyset$.

定理 3.1.6(结构定理2)　设 g 是群 G 上的正规幂群，则 $\overline{G}$ 是 G 的子群，$\overline{E}$ 是 $\overline{G}$ 的正规子群，且

$$g = \{A = aE = Ea \mid a \in \overline{A} \subseteq \overline{G}\} \tag{3.7}$$

证明　$\overline{E}$ 是 $\overline{G}$ 的子群，$\overline{G}$ 是 G 的子群，直接由式(3.4)，式(3.5)，式(3.6)得到.

显然，当 $a \in \overline{A}$ 时，$aE \subseteq AE = A$，$\forall b \in A$，由于 $a \in \overline{A}$，$b = eb = aa^{-1}b = a(a^{-1}b) \in aA^{-1}A = aE$，即 $A \subseteq aE$，于是 $A = aE$. 同理，$A = Ea$，所以 $a \in \overline{A}$，$A = aE = Ea$.

最后证 $\overline{E}$ 是 $\overline{G}$ 的正规子群.

$\forall x \in \overline{E} \subseteq E$，则 $x^{-1} \in \overline{E} \subseteq E$，由 $aE = Ea$，$\exists y \in E$，使得 $ax = ya$，则 $y = axa^{-1}$，$y^{-1} = ax^{-1}a^{-1} \in aEa^{-1} = E$，故 $y \in \overline{E}$，即 $a\overline{E} = \overline{E}a$，所以 $\overline{E}$ 是 $\overline{G}$ 的正规子群.

记群 G 上的正规幂群 g 为

$$g = \left\{aE = Ea \mid a \in \overline{G}\right\} = \overline{G}\Big|_E \tag{3.8}$$

推论 3.1.2　设 g 是群 G 上的正规幂群，则

(1) E 是 $\overline{G}$ 的正规独异点；

(2) $\overline{G}\big/E$ 是 $\overline{G}$ 关于 $\overline{E}$ 的商群.

定理 3.1.7(构造定理2)　设 H 是群 G 的子群，E 是 G 的关于 H 的正规独异点，记

$$H\Big|_E \triangleq \left\{aE \mid a \in H\right\} \tag{3.9}$$

则 $H\Big|_E$ 是 G 上的正规幂群.

定理证明类似于定理 3.1.4 的证明. E 是单位元，$a^{-1}E$ 是 aE 的逆元. 即

$$(aE)^{-1} = a^{-1}E \tag{3.10}$$

例 3.1.3　设 $\mathbf{R}^+$ 是正实数乘群，$E = [1, +\infty)$ 是 $\mathbf{R}^+$ 的正规独异点，$\mathbf{Q}^+$ 是正有理数乘群，则

$$g = \left\{aE \mid a \in \mathbf{Q}^+\right\}$$

是 $\mathbf{R}^+$ 上的 E 关于 $\mathbf{Q}^+$ 的正规幂群.

定理 3.1.8 设 g 是群 G 上的正规幂群,则

(1) $$\forall a,b\in\overline{G},\quad aE=bE\Leftrightarrow a\overline{E}=b\overline{E} \tag{3.11}$$

(2) $$\forall a,b\in\overline{G},\quad Ea=Eb\Leftrightarrow \overline{E}a=\overline{E}b \tag{3.12}$$

证明 (1) $aE=bE$,由 $e\in E$,得 $b\in aE, a\in bE$,则 $a^{-1}b\in E, b^{-1}a\in E$,故 $a^{-1}b\in\overline{E}$,由此 $a\overline{E}=b\overline{E}$.

若 $a\overline{E}=b\overline{E}$,则 $a^{-1}b\in\overline{E}\subseteq E, b^{-1}a\in\overline{E}\subseteq E$,即 $b\in aE, a\subseteq bE$,故 $bE\subseteq aE^2=aE, aE\subseteq bE^2=bE$,由此 $aE=bE$. 所以 $aE=bE\Leftrightarrow a\overline{E}=b\overline{E}$.

同理证(2).

定理 3.1.9(同构定理) 设 $\overline{G}\big|_E$ 是群 G 上的正规幂群,则 $\overline{G}\big|_E\cong\overline{G}/\overline{E}$.

证明 令 $f:\overline{G}\big|_E\to\overline{G}/\overline{E}, f(aE)=a\overline{E}$,由定理 3.1.8 知 f 是双射,且 $\forall aE, bE\in\overline{G}\big|_E, f((aE)(bE))=f(abE)=ab\overline{E}=(a\overline{E})(b\overline{E})=f(aE)f(bE)$,所以 f 是同构映射,即 $\overline{G}\big|_E\cong\overline{G}/\overline{E}$.

定义 3.1.4 群 G 上 $\overline{G}=G$ 的正规幂群称为 G 的广义商群,记为 $G\big|_E$.

推论 3.1.3 群 G 上的每一个广义商群 $G\big|_E$ 都同构于 G 的商群 $G/\overline{E}$.

定理 3.1.10 设 $\overline{G}\big|_E$ 是群 G 上的正规幂群,则

(1) $\overline{G}\big|_E$ 的每个子群的形式为

$$H\big|_E\triangleq\left\{aE\mid a\in H, E\subseteq H, H\text{ 是 }\overline{G}\text{ 的子群}\right\} \tag{3.13}$$

(2) $\overline{G}\big|_E$ 的每个正规子群的形式为

$$H\big|_E\triangleq\left\{aE\mid a\in H, E\subseteq H, H\text{ 是 }\overline{G}\text{ 的正规子群}\right\} \tag{3.14}$$

由同构定理 3.1.9 直接可得.

设 E 是群 G 的子集,记

$$N(E)\triangleq\left\{a\in G\mid aE=Ea\right\} \tag{3.15}$$

则 $N(E)$ 是 G 的子群,称为 E 的正规化子.

定理 3.1.11 设 E 是群 G 的独异点,则以 E 为单位元的最大正规幂群为 $N(E)\big|_E$;最小的正规幂群为 $\{E\}$. 从而正规幂群 $\overline{G}\big|_E$ 均为 $N(E)\big|_E$ 的子群.

推论 3.1.4 若 E 是群 G 的正规独异点,则广义商群 $G\Big|_E$ 是以 E 为单位元的最大正规幂群,且每个正规幂群 $\overline{G}\Big|_E$ 均为 $G\Big|_E$ 的子群.

推论 3.1.5 交换群 G 的正规幂群均为广义商群 $G\Big|_E$ 的子群.

设 g 是群 G 上的幂群, $\forall A \in g$,记

$$A^{(-1)} \triangleq \left\{ a^{-1} \in G^* \mid a \in A \right\} \tag{3.16}$$

称 $A^{(-1)}$ 为 A 的逆元集.

显然, $e \in E \Leftrightarrow A^{(-1)} \neq \emptyset$.

定理 3.1.12 设 g 是群 G 上的一致幂群,则:

(1) $\forall A \in g, A^{(-1)} = A^{-1}$;

(2) $\overline{E} = E, \overline{G} = G^*$.

证明 (1) $\forall a \in A^{-1}$,由 $e \in E$ 和 $AA^{-1} = E$, $\exists b \in A, b^{-1} \in A^{-1}$,使得 $bb^{-1} = e$,又由定理 3.1.7 知 $A^{-1} = b^{-1}E$,对于 $a \in A^{-1}$, $\exists c \in E$,使得 $a = b^{-1}c$,则 $a^{-1} = c^{-1}b \in EA = A$,故 $a \in A^{(-1)}$,即 $A^{-1} \subseteq A^{(-1)}$. 另外, $\forall a \in A^{(-1)}$,则 $a^{-1} \in A$,由 $AA^{-1} = E$, $\exists b \in A^{-1}, c \in E$,使得 $a^{-1}b = c$,故 $a = bc^{-1} \in A^{-1}E = A^{-1}$,即 $A^{(-1)} \subseteq A^{-1}$,所以

$$A^{(-1)} = A^{-1}.$$

(2) 由于 E 是 G 的子群,则 $\overline{E} = E$. 再由式(3.2)、式(3.4)、式(3.5)知

$$\overline{G} = G^*.$$

定理 3.1.13(结构定理) 设 g 是群 G 上的一致幂群,则 G^* 是 G 的子群, E 是 G^* 的正规子群,且

$$g = \left\{ A = aE = Ea \mid a \in A \subseteq G^* \right\}. \tag{3.17}$$

推论 3.1.6 群 G 上的一致幂群 $G^*\big/E$ 是 G^* 关于 E 的商群; $G^* = G$ 的一致幂群是商群 $G\big/E$.

推论 3.1.7 (1) 若 E 是群 G 的正规子群,则以 E 为单位元的一致幂群均为商群 $G\big/E$ 的子群.

(2) 交换群 G 上的一致幂群均为商群 $G\big/E$ 的子群.

推论 3.1.8(Lagrange 定理) 若 g 是有限群 G 上的幂群,则

$$|G| = [G:G^*][G^*:E]|E|$$

推论 3.1.9 g 是有限群 G 上的幂群的必要条件是 $|E|$ 是 $|G^*|$ 的因子,

$|G^*|$ 是 $|G|$ 的因子.

推论 3.1.10 阶数为素数的有限群只有单位元作为独点集 $\{e\}$ 构成的幂群(称为自然幂群)和由 G 的独点集 $\left\{\{a\}\mid a\in G\right\}$ 构成的幂群(称为离散幂群).

定理 3.1.14(构造定理 3) 设 H 是群 G 的子群,E 是 G 的关于 H 的正规子群,则

$$H\Big/E\triangleq\left\{aE\mid a\in H\right\}\tag{3.18}$$

是 G 上的一致幂群.

证明和定理 3.1.4 的证明类似. E 是单位元,$a^{-1}E$ 是 aE 的逆元.

例 3.1.4 设非零实数乘群$(R_0,\cdot)$,取 $E=(0,+\infty)$ 是 R_0 的子群,设$(Q_0,\cdot)$是非零有理数乘群,令 $g=\left\{aE\mid a\in Q_0\right\}$,则 g 是 R_0 上的一致幂群.

定理 3.1.15 设 $G^*\Big/E$ 是群 G 上的一致幂群,则:

(1) $G^*\Big/E$ 的每一个子群的形式为

$$H\Big/E\triangleq\left\{aE\mid a\in H,E\subseteq H,H\text{ 是 }G^*\text{ 的子群}\right\}\tag{3.19}$$

(2) $G^*\Big/E$ 的每一个正规子群的形式为

$$H\Big/E\triangleq\left\{aE\mid a\in H,E\subseteq H,H\text{ 是 }G^*\text{ 的正规子群}\right\}\tag{3.20}$$

定理 3.1.16 设 E 是群 G 的子群,则以 E 为单位元的最大一致幂群为 $N(E)\Big/E$;最小一致幂群为 $\{E\}$.

特别地,若 E 是群 G 的正规子群,则商群 $G\Big/E$ 是以 E 为单位元的最大一致幂群.

定理 3.1.17 群 G 上的一致幂群 $G^*\Big/E$ 均为 $N(E)\Big/E$ 的子群;当 E 是 G 的正规子群时,一致幂群 $G^*\Big/E$ 均为商群 $G\Big/E$ 的子群.

推论 3.1.11 交换群的一致幂群均为某一商群的子群.

§3.2 幂群的分类

定理 3.2.1 设 g_1,g_2 是群 G 上的正规(一致)幂群,则 $E_1\neq E_2$ 的充分必要

条件是 $g_1 \cap g_2 = \emptyset$.

其中 E_1, E_2 分别是 g_1, g_2 的单位元.

证明 充分性显然.

假若 $g_1 \cap g_2 \neq \emptyset$,则 $\exists A \in g_1, A \in g_2$,由此 $\forall a \in \overline{A}(a \in A)$, $A = aE_1 = aE_2$,故 $E_1 = E_2$ 与 $E_1 \neq E_2$ 矛盾,所以 $g_1 \cap g_2 = \emptyset$.

由定理 3.2.1 知,群 G 上的正规(一致)幂群可以用单位元进行分类,不同的单位元对应于不同的幂群类. 以 E 为单位元的正规幂群类记为 $g(E)$,一致幂群类记为 $g^*(E)$.

设 $NH(G)$ 表示群 G 上的所有正规幂群类,则

$$NH(G) \triangleq \left\{ g(E) \mid E \text{ 是 } G \text{ 的独异点} \right\} \tag{3.21}$$

设 $UH(G)$ 表示群 G 上的所有一致幂群类,则

$$UH(G) \triangleq \left\{ g^*(E) \mid E \text{ 是 } G \text{ 的子群} \right\} \tag{3.22}$$

显然,$UH(G) \subseteq NH(G)$.

定理 3.2.2 设 E 是群 G 的独异点(子群),则 G_1 是 $N(E)$ 的子群的充分必要条件是 $G_1 \Big|_E \left(G_1 \Big/ E \right)$是 $N(E) \mid_E \left(N(E) \Big/ E \right)$的子群.

证明 $\forall aE, bE \in G_1 \Big|_E (a, b \in G_1)$,由于$(aE)(bE)^{-1} = aEb^{-1}E = ab^{-1}E$,则 $ab^{-1} \in G_1 \Leftrightarrow (aE)(bE)^{-1} = ab^{-1}E \in G_1 \Big|_E$,所以 G_1 是 $N(E)$的子群的充分必要条件是 $G_1 \Big|_E$ 是 $N(E) \Big|_E$ 的子群.

一致幂群的情况同理可证.

推论 3.2.1 (1)设 $g(E) \in NH(G)$,则

$$g(E) = \left\{ \overline{G} \Big|_E \mid \overline{G} \text{ 是 } N(E) \text{ 的子群} \right\} \tag{3.23}$$

(2) 设 $g^*(E) \in UH(G)$,则

$$g^*(E) = \{ G^* / E \mid G^* \text{ 是 } N(E) \text{ 的子群} \} \tag{3.24}$$

由同构定理 3.1.9 立即可得下列结论.

定理 3.2.3 设 E 是群 G 的独异点,则对于正规幂群 $N(E) \Big|_E$ 的任意子群 $\overline{G} \Big|_E$ 都惟一存在一致幂群 $N(E) \Big/ E$ 的子群 $\overline{G} \Big/ \overline{E}$ 和它对应,且 $\overline{G} \Big|_E \cong \overline{G} \Big/ \overline{E}$.

推论 3.2.2 若 E 是群 G 的正规独异点,则广义商群 $G \mid_E$ 的任意子群 $\overline{G} \mid_E$

都惟一存在商群 $G/\overline{E}$的子群 $\overline{G}/\overline{E}$ 与它对应，且 $\overline{G}|_E\cong\overline{G}/\overline{E}$.

定理 3.2.4 设 $G_1|_E, G_2|_E\in g(E)\left(G_1/E, G_2/E,\in g^*(E)\right)$，则

(1) G_1 是 G_2 的子群的充分必要条件是 $G_1|_E\left(G_1/E\right)$是 $G_2|_E\left(G_2/E\right)$的子群；

(2) G_1 是 G_2 的正规子群的充分必要条件是 $G_1|_E\left(G_1/E\right)$是 $G_2|_E\left(G_2/E\right)$的正规子群.

证明 (1)的证明与定理3.2.2的证明相同.

(2) $\forall hE\in G_1|_E, aE\in G_2|_E(h\in G_1, a\in G_2)$，由于$(aE)(hE)(aE)^{-1}=aEhEa^{-1}E=aha^{-1}E$，所以 $aha^{-1}\in G_1\Leftrightarrow aha^{-1}E\in G_1|_E$，所以 G_1 是 G_2 的正规子群的充分必要条件是 $G_1|_E$ 是 $G_2|_E$ 的正规子群.

同理证明一致幂群的情况.

定义 3.2.1 设 $g(E)\in NH(G)$，$\overline{E}=G_0\subseteq G_1\subseteq\cdots\subseteq G_n=N(E)$是 $N(E)$的子集列，

(1)若 G_{i-1}是 G_i 的子群$(i=1,2,\cdots,n)$，则称子集列

$$G_0|_E<G_1|_E<\cdots<G_n|_E \tag{3.25}$$

是正规幂群类 $g(E)$的子群列；若上述子集列无异于自身的加细，称为合成子群列.

(2)若 G_{i-1}是 G_i 的正规子群$(i=1,2,\cdots,n)$，则称子集列

$$G_0|_E\lhd G_1|_E\lhd\cdots\lhd G_n|_E \tag{3.26}$$

是正规幂群类 $g(E)$的正规子群列；若上述子集列无异于自身的加细，称为合成正规子群列.

定义 3.2.2 设 $g^*(E)\in UH(G)$，$E=G_0\subseteq G_1\subseteq\cdots\subseteq G_n=N(E)$是 $N(E)$的子集列，

(1)若 G_{i-1}是 G_i 的子群$(i=1,2,\cdots,n)$，则称子集列

$$G_0/E<G_1/E<\cdots<G_n/E \tag{3.27}$$

是一致幂群类 $g^*(E)$的子群列；若上述子集列无异于自身的加细，称为合成子群列.

(2)若 G_{i-1}是 G_i 的正规子群$(i=1,2,\cdots,n)$，则称子集列

$$G_0/E\lhd G_1/E\lhd\cdots\lhd G_n/E \tag{3.28}$$

是一致幂群类 $g^*(E)$ 的正规子群列；若上述子集列无异于自身的加细，称为合成正规子群列.

定理 3.2.5　正规（一致）幂群类 $g(E)$（$g^*(E)$）的子群列(3.25)((3.27))或正规子群列(3.26)((3.28))是合成子群列或合成正规子群列的充分必要条件是 G_{i-1} 是 $G_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的极大子群或极大正规子群.

定义 3.2.3　对于正规（一致）幂群类 $g(E)$（$g^*(E)$）的两个正规子群列，若它们的商群一一对应且对应商群同构，则称这两个正规子群列同构.

定理 3.2.6　设 $g(E)\in NH(G)$，$g(E)$ 的两个正规子群列 $G_0|_E\lhd G_1|_E\lhd\cdots\lhd G_{n-1}|_E\lhd N(E)|_E$ 和 $H_0|_E\lhd H_1|_E\lhd\cdots\lhd H_{n-1}|_E\lhd N(E)|_E$ 同构的充分必要条件是 $N(E)$ 的两个正规子群列 $G_0\lhd G_1\lhd\cdots\lhd G_{n-1}\lhd N(E)$ 和 $H_0\lhd H_1\lhd\cdots\lhd H_{n-1}\lhd N(E)$ 同构.

定理 3.2.7　设 $g^*(E)\in UH(G)$，$g^*(E)$ 的两个正规子群列 $G_0/E\lhd G_1/E\lhd\cdots\lhd G_{n-1}/E\lhd N(E)/E$ 和 $H_0/E\lhd H_1/E\lhd\cdots\lhd H_{n-1}/E\lhd N(E)/E$ 同构的充分必要条件是 $N(E)$ 的两个正规子群列 $G_0\lhd G_1\lhd\cdots\lhd G_{n-1}\lhd N(E)$ 和 $H_0\lhd H_1\lhd\cdots\lhd H_{n-1}\lhd N(E)$ 同构.

定理 3.2.8　(1)设 $\overline{G}_1|_E,\overline{G}_2|_E\in g(E)$，则 $(\overline{G}_1\cap\overline{G}_2)|_E\in g(E)$，且

$$(\overline{G}_1\cap\overline{G}_2)|_E=\overline{G}_1|_E\cap\overline{G}_2|_E \tag{3.29}$$

(2)设 $G_1^*/E,G_2^*/E\in g^*(E)$，则 $(G_1^*\cap G_2^*)/E\in g^*(E)$，且

$$(G_1^*\cap G_2^*)/E=G_1^*/E\cap G_2^*/E \tag{3.30}$$

证明　只证(1)，(2)的证明类似.

由于 $\overline{G}_1,\overline{G}_2$ 是 $N(E)$ 的子群，则 $\overline{G}_1\cap\overline{G}_2$ 是 $N(E)$ 的子群，故 $(\overline{G}_1\cap\overline{G}_2)|_E\in g(E)$.

$\forall aE\in(\overline{G}_1\cap\overline{G}_2)|_E\Leftrightarrow a\in\overline{G}_1,a\in\overline{G}_2\Leftrightarrow aE\in\overline{G}_1|_E,aE\in\overline{G}_2|_E\Leftrightarrow aE\in\overline{G}_1|_E\cap\overline{G}_2|_E$，故 $(\overline{G}_1\cap\overline{G}_2)|_E=\overline{G}_1|_E\cap\overline{G}_2|_E$.

定理 3.2.9　(1)设 $\overline{G}_1|_E,\overline{G}_2|_E\in g(E)$，$\overline{G}_1$ 是 $N(E)$ 的正规子群，则 $\overline{G}_1\overline{G}_2|_E\in g(E)$，且

$$\overline{G}_1\overline{G}_2|_E=(\overline{G}_1|_E)(\overline{G}_2|_E) \tag{3.31}$$

(2)设 $G_1^*/E,G_2^*/E\in g^*(E)$，$G_1^*$ 是 $N(E)$ 的正规子群，则 $(G_1^*G_2^*)/E\in g^*(E)$，且

$$(G_1^*G_2^*)/E=\left(G_1^*/E\right)\left(G_2^*/E\right) \tag{3.32}$$

证明 只证(1),(2)的证明类似.

由于 $\overline{G}_1$ 是 $N(E)$ 的正规子群,$\overline{G}_2$ 是 $N(E)$ 的子群,则 $\overline{G}_1\ \overline{G}_2$ 是 $N(E)$ 的子群,故 $\overline{G}_1\ \overline{G}_2\mid_E \in g(E)$.

$\forall\, aE\in(\overline{G}_1\ \overline{G}_2)\mid_E$,则 $\exists\, a_1\in\overline{G}_1$,$\exists\, a_2\in\overline{G}_2$,使 $a=a_1a_2$,且 $aE=a_1a_2E=(a_1E)(a_2E)\in(\overline{G}_1\mid_E)(\overline{G}_2\mid_E)$,即 $\overline{G}_1\ \overline{G}_2\mid_E\subseteq(\overline{G}_1\mid_E)(\overline{G}_2\mid_E)$.

另外,$\forall\,(aE)(bE)\in(\overline{G}_1\mid_E)(\overline{G}_2\mid_E)(a_1\in\overline{G}_1,a_2\in\overline{G}_2)$,由于 $(aE)(bE)=aEbE=abE\in(\overline{G}_1\overline{G}_2)\mid_E$,所以 $(\overline{G}_1\mid_E)(\overline{G}_2\mid_E)\subseteq(\overline{G}_1\overline{G}_2)\mid_E$,由此

$$\overline{G}_1\ \overline{G}_2\mid_E=(\overline{G}_1\mid_E)(\overline{G}_2\mid_E).$$

由此我们可以利用代数学的第三同构定理(Zassenhaus 定理),用正规(一致)幂群类的交与积把正规(一致)幂群类的两个正规子群列加细为合成正规子群列,得到 O. Schreier 定理和 Jordan-Hölder 定理的推广.

定理 3.2.10 对于同一正规(一致)幂群类 $g(E)(g^*(E))$ 的任意两个正规子群列有同构加细.

定理 3.2.11 如果正规(一致)幂群类 $g(E)(g^*(E))$ 有合成正规子群列,那么该类的任意正规子群列可以加细为合成正规子群列,且同一类中任意两个合成正规子群列同构.

§3.3 幂群的同态与同构

定理 3.3.1 设 f 是群 G 到 G_1 的同态映射,g 是 G 上的幂群,

$$g_1\triangleq f(g)\triangleq\left\{f(A)\mid A\in g\right\}\tag{3.33}$$

则 g_1 是 G_1 上的幂群,且 $g_1\sim g$.

证明 $\forall\, A_1,B_1\in g_1$,则 $\exists\, A,B\in g$,使得 $f(A)=A_1$,$f(B)=B_1$,则 $A_1B_1=f(A)f(B)=f(AB)$,故 $A_1B_1\in g_1$. 令 $f(E)=E_1$,则 $E_1A_1=f(E)f(A)=f(EA)=f(A)=A_1$,同理 $A_1E_1=A_1$,所以 $E_1=f(E)$ 是 g_1 的单位元. 因为 $f(A^{-1})f(A)=f(A^{-1}A)=f(E)=E_1$,同理 $f(A)f(A^{-1})=E_1$,于是,$(f(A))^{-1}=f(A^{-1})$,所以 g_1 是 G_1 上的幂群.

由式(3.33)知 f 是 g 到 g_1 的满射,且 $f(AB)=f(A)f(B)$,所以 f 是 g 到 g_1 的满同态,因此 $g_1\sim g$.

定理 3.3.2 设 f 是群 G 到 G_1 的满同态,g_1 是 G_1 上的幂群,则

$$g\triangleq f^{-1}(g_1)\triangleq\left\{f^{-1}(A_1)\mid A_1\in g_1\right\}\tag{3.34}$$

是 G 上的幂群,且 $g\sim g_1$.

其中$f^{-1}(A_1)=\left\{x\in G\,|\,f(x)\in A_1\right\}$.

证明与定理3.3.1的证明类似,从略.

定理3.3.3 设$G^*\big/E$是群G上的一致幂群,$f:G\to G_1$是同态映射,记$\bar{f}=f|_{G^*}$,若$E\subseteq\ker\bar{f}$,则惟一存在同态映射$f^*: G^*\big/E\to G_1$,使得$\bar{f}=f^*\circ\varphi$,(φ是G^*到$G^*\big/E$的自然映射),且当$E=\ker\bar{f}$时,$\bar{f}$是单一同态,$G^*\big/E\cong\bar{f}(G^*)$(如图3.1所示).

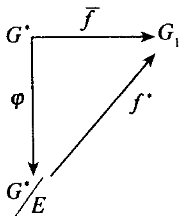


图3.1

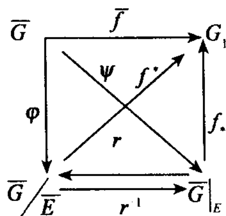


图3.2

定理3.3.4 设$\bar{G}|_E$是群G上的正规幂群,$f:G\to G_1$是同态映射,记$\bar{f}=f|_{\bar{G}}$,若$\bar{E}\subseteq\ker f$,则惟一存在同态映射$f_*:\bar{G}|_E\to G_1$,使得$\bar{f}=f_*\circ\Psi$,(Ψ是$\bar{G}$到$\bar{G}|_E$的正规同态),且$\bar{E}=\ker\bar{f}$时,f_*是单一同态,$\bar{G}|_E\cong\bar{f}(\bar{G})$.

证明 如图3.2所示,由定理3.3.3知,惟一存在$f^*:\bar{G}\big/\bar{E}\to G_1$,使得$\bar{f}=f^*\circ\varphi$,取$f_*=f^*\circ r$,$\Psi=r^{-1}\circ\varphi$,则$f_*\circ\Psi=f^*\circ r\circ r^{-1}\circ\varphi=f^*\circ\varphi=\bar{f}$($r$是$\bar{G}|_E$到$\bar{G}\big/\bar{E}$的同构映射),由$f^*$和$r$的惟一性知,$f_*$也是惟一的.

最后,由于$\bar{E}=\ker\bar{f}\Leftrightarrow f^*$是单同态$\Leftrightarrow f_*$是单同态,从而$\bar{G}|_E\cong\bar{f}(\bar{G})$.

推论3.3.1 群G上的广义商群$G|_E$是G的同态像;反之,若G_1是群G的同态像,即$f(G)=G_1$,则$G_1\cong G|_E$(其中$\bar{E}=\ker f$).

定理3.3.5 设f是群G到群G_1的满同态,若$G^*_1\big/E_1$是G_1上的一致幂群,记$E=f^{-1}(E_1)$,$G^*=f^{-1}(G_1^*)$,则$G^*\big/E$是G上的一致幂群,且$G^*\big/E\cong G_1^*$

$\Big/ E_1$.

证明 令 $\bar{f}=f|_{G^*}$，如图 3.3 所示，$g=\varphi\circ\bar{f}$，而

$$\ker g=(\varphi\circ\bar{f})^{-1}(E_1)=\bar{f}^{-1}(\varphi^{-1}(E_1))=f^{-1}(E_1)=E,$$

故 $G^*\Big/E\cong G_1^*\Big/E_1$.

定理 3.3.6 设 f 是群 G 到群 G_1 的满同态，若 $G^*\Big/E$ 是 G 上的一致幂群，记 $f(E)=E_1$，$f(G^*)=G_1^*$，则 $G_1^*\Big/E_1$ 是 G_1 上的一致幂群，且当 $E\supseteq\ker f$ 时，$G^*\Big/E\cong G_1^*\Big/E_1$.

证明 因为 $f(E)=E_1$，则 $f^{-1}(E_1)=f^{-1}(f(E))\supseteq E$，又 $E\supseteq\ker f=f^{-1}(E_1)$，从而 $E=f^{-1}(E_1)=\ker f$，所以 $G^*\Big/E\cong G_1^*\Big/E_1$.

定理 3.3.7 设 f 是群 G 到群 G_1 的满同态，若 $\bar{G}_1|_{E_1}$ 是 G_1 上的正规幂群，记 $E\triangleq f^{-1}(E_1)$，$\bar{G}=f^{-1}(\bar{G}_1)$，则 $\bar{G}|_E$ 是 G 上的正规幂群，且 $\bar{G}|_E\cong\bar{G}_1|_{E_1}$.

证明 因 $\bar{G}=f^{-1}(\bar{G}_1)$ 是 G 的子群，$E=f^{-1}(E_1)$ 是 $\bar{G}$ 的正规独异点，则 $\bar{G}|_E$ 是 G 的正规幂群.

令 $\bar{f}=f|_{\bar{G}}$，则 $f(f^{-1}(\bar{G}_1))=\bar{G}_1$，即 $\bar{f}$ 是 $\bar{G}$ 到 $\bar{G}_1$ 的满同态. 如图 3.4 所示，记 $g\triangleq\Psi\circ\bar{f}$（$\Psi$ 是 $\bar{G}_1$ 到 $\bar{G}_1|_{E_1}$ 的正规同态），故 g 是 $\bar{G}$ 到 $\bar{G}_1|_{E_1}$ 的满同态，由定理 3.3.4 知，当 $\bar{E}=\ker g$ 时，$\bar{G}|_E\cong\bar{G}_1|_{E_1}$.

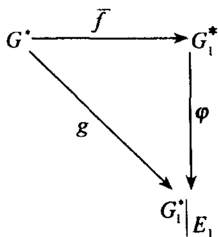


图 3.3

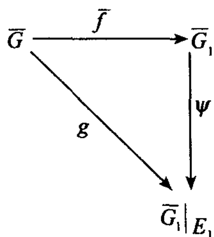


图 3.4

现证 $\bar{E}=\ker g$，$\forall a\in\ker g$，则 $g(a)\in E_1$，即 $(\Psi\circ\bar{f})(a)=\Psi(\bar{f}(a))\in E_1$，故 $\bar{f}(a)E_1=E_1$，从而 $\bar{f}(a)\bar{E}_1=\bar{E}_1$，于是 $\bar{f}(a)\in\bar{E}_1\subseteq E_1$，则 $a\in f^{-1}(E_1)=E$，

又 $a^{-1}\in\ker g$,同理证 $a^{-1}\in f^{-1}(E_1)=E$,所以 $a\in\overline{E}$,即 $\ker g\subseteq\overline{E}$. 反之,$a\in\overline{E}$,则 $a\in E$,且 $a^{-1}\in E$,则 $\overline{f}(a)\in E_1$, $\overline{f}(a^{-1})=(\overline{f}(a))^{-1}\in E_1$,故 $\overline{f}(a)\in\overline{E}_1$,于是 $\overline{f}(a)\overline{E}_1=\overline{E}_1$,从而 $\overline{f}(a)E_1=E_1$,即 $\overline{f}(a)\in E_1$,则 $g(a)=\Psi(\overline{f}(a))\in\Psi(E_1)=E_1$,所以 $a\in\ker g$,由此 $\overline{E}\subseteq\ker g$,故 $\ker g=\overline{E}$,于是 $\overline{G}|_E\cong\overline{G}_1|_{E_1}$.

定理 3.3.8　设 f 是群 G 到群 G_1 的满同态,若 $\overline{G}|_{\overline{E}}$ 是 G 上的正规幂群,记 $f(E)=E_1$,$f(\overline{G})=\overline{G}_1$,则 $\overline{G}_1|_{E_1}$ 是 G_1 上的正规幂群,且当 $E\supseteq\ker f$ 时,$\overline{G}|_E\cong\overline{G}_1|_{E_1}$.

证明　因为 $\overline{G}_1=f(G)$ 是 G_1 的子群,$E_1=f(E)$ 是 $\overline{G}_1$ 的正规独异点,所以 $\overline{G}_1|_{E_1}$ 是 G_1 上的正规幂群.

由于 $f^{-1}(\overline{G}_1)=f^{-1}(f(G))\supseteq\overline{G}$,$f^{-1}(E_1)=f^{-1}(f(E))\supseteq E$,只需证 $f^{-1}(E_1)\subseteq E$,$f^{-1}(\overline{G}_1)\subseteq\overline{G}$,则 $f^{-1}(E_1)=E$,$f^{-1}(\overline{G}_1)=\overline{G}$,由定理 3.3.7 得 $\overline{G}|_E\cong\overline{G}_1|_{E_1}$.

事实上,$\forall a\in f^{-1}(E_1)=f^{-1}(f(E))$,则 $f(a)\in f(E)$,故 $\exists h\in E$,使得 $f(a)=f(h)=f(eh)=f(e)f(h)$,则 $f(a)(f(h))^{-1}=f(ah^{-1})=f(e)$,故 $ah^{-1}\in\ker f\subseteq E$,于是 $\exists h_1\in E$,使得 $ah^{-1}=h_1$,则 $a=h_1h\in E$,从而 $f^{-1}(E_1)\subseteq E$. 同理证 $f^{-1}(\overline{G}_1)\subseteq\overline{G}$,所以 $\overline{G}|_E\cong\overline{G}_1|_{E_1}$.

§3.4　幂环及其分类

设 $(R,+,\cdot)$ 是环,在幂集 $P(R)-\{\emptyset\}$ 中引入代数运算,$\forall A,B\in P(R)-\{\emptyset\}$,

$$A+B\triangleq\left\{a+b\mid a\in A,b\in B\right\}\tag{3.35}$$

$$A\cdot B\triangleq\left\{a\cdot b\mid a\in A,b\in B\right\}\tag{3.36}$$

显然 $P(R)-\{\emptyset\}$ 分别关于式(3.35)和式(3.36)构成半群。简记

$$a\cdot b=ab,A\cdot B=AB,\{a\}\cdot B=aB,\{a\}+B=a+B.$$

定理 3.4.1　设 $(R,+,\cdot)$ 是环,$\forall A,B,C\in P(R)-\{\emptyset\}$,

(1)　$$A(B+C)\subseteq AB+AC\tag{3.37}$$

(2)　$$(B+C)A\subseteq BA+CA\tag{3.38}$$

证明　(1) $\forall x\in A(B+C)$,则 $\exists a\in A,b\in B,c\in C$,使得 $x=a(b+c)=ab+ac\in AB+AC$,故 $A(B+C)\subseteq AB+AC$. 同理 $(B+C)A\subseteq BA+CA$.

注:式(3.37)、式(3.38)两式的等号不一定成立,若 $0\in C$,则 $\forall x\in AB$,$\exists a\in A,b\in B$,使得 $x=ab=a(b+0)\in A(B+C)$,即 $AB\subseteq A(B+C)$;若 $0\in B$,同理

证 $AC\subseteq A(B+C)$,从而 $AB+AC\subseteq A(B+C)$. 所以对于集合类 $\emptyset=\left\{A\in P(R)-\{\emptyset\}\mid 0\in A\right\}$,运算(3.36)对运算(3.35)的分配律是成立的. 由此 $P(R)-\{\emptyset\}$ 中的分配律存在.

定义 3.4.1 设 $(R,+,\cdot)$ 是环,$\mathscr{R}\subseteq P(R)-\{\emptyset\}$,若 $\mathscr{R}$ 关于运算(3.35)和运算(3.36)构成环,则称 $\mathscr{R}$ 是 R 上的幂环. 其零元用 Q 来表示,A 的负元用 $-A$ 来表示.

定理 3.4.2(结构定理 1) 设 $\mathscr{R}$ 是环 R 上的幂环,记 $R^*\triangleq\cup\left\{A\mid A\in\mathscr{R}\right\}$,则

(1) $\forall A,B\in\mathscr{R},|A|=|Q|$;若 $A\cap B\neq\emptyset$,则 $|A\cap B|=|Q|$;

(2) $(Q,+)$,$(Q,\cdot)$,$(R^*,+)$,$(R^*,\cdot)$ 都是半群;

(3)
$$R^*Q\cup QR^*\subseteq Q \tag{3.39}$$

(4) 若 $(Q,+)$ 是 $(R,+)$ 的独异点,则 $(R^*,+)$ 是 $(R,+)$ 的独异点,从而 Q 和 R^* 是 R 的含零元的半环;

(5) 若 $(Q,+)$ 是 $(R,+)$ 的子群,则 $(R^*,+)$ 是 $(R,+)$ 的子群;从而 Q 和 R^* 是 R 的子环,Q 是 R^* 的理想.

证明 (1)的证明与定理 3.1.1 的证明类似,(2)、(4)、(5)的证明与定理 3.1.2 的证明类似,从略.

(3) $\forall x\in R^*Q\cup QR^*$,不妨设 $x\in R^*Q$,则 $\exists A\in\mathscr{R},a\in A,b\in Q$,使得 $x=ab\in AQ=Q$,从而 $R^*Q\subseteq Q$,同理 $QR^*\subseteq Q$,所以 $R^*Q\cup QR^*\subseteq Q$. 从而得到(5)中的结论 Q 是 R^* 的理想.

推论 3.4.1 若 $\mathscr{R}$ 是有限环 R 上的幂环,则 Q、R^* 是 R 的子环,Q 是 R^* 的理想.

定理 3.4.3 设 $\mathscr{R}$ 是环 R 上的幂环,则 R 的零元 $0\in R^*$ 的充分必要条件是 $0\in Q$.

证明 充分性显然.

由于 $0\in R^*$,则 $\exists A\in\mathscr{R}$,使得 $0\in A$,从而 $0\in\{0\}\subseteq 0Q\subseteq AQ=Q$.

定理 3.4.3 说明不存在 $0\in R^*$,$0\notin Q$ 的幂环;但例 3.1.2 说明存在 $e\in G^*$,$e\notin E$ 的幂群.

定义 3.4.2 设 $\mathscr{R}$ 是环 R 上的幂环,

(1) 若 $(Q,+)$ 是 $(R,+)$ 的独异点,即 $(Q,+,\cdot)$ 是 $(R,+,\cdot)$ 的含零元的半环,则称 $\mathscr{R}$ 是 R 上的正规幂环.

(2) 若$(Q,+)$是$(R,+)$的子群,即$(Q,+,\cdot)$是$(R,+,\cdot)$的子环,则称$\mathscr{R}$是$\mathscr{R}$上的一致幂环.

设$\mathscr{R}$是R上的幂环,$\forall A\in\mathscr{R}$,记

$$\overline{A}\triangleq\left\{a\in A\mid -a\in -A\right\}\tag{3.40}$$

$$\overline{R}\triangleq\cup\left\{\overline{A}\mid A\in\mathscr{R}\right\}\tag{3.41}$$

称$\overline{A}$为A的核,$\overline{R}$是R^{*}的核.特别地,

$$\overline{Q}\triangleq\left\{a\in Q\mid -a\in Q\right\}\tag{3.42}$$

由于正规(一致)幂环中,$0\in Q$,故$\forall A\in\mathscr{R},\overline{A}\neq\emptyset$.

定理 3.4.4(结构定理2)　设$\mathscr{R}$是环R上的正规幂环,则$\overline{R}$是R的子环,$\overline{Q}$是$\overline{R}$的理想,且

$$\mathscr{R}=\left\{a+Q\mid a\in\overline{R}\right\}\tag{3.43}$$

证明　$\forall a,b\in\overline{R},\exists A,B\in\mathscr{R}$,使得$a\in\overline{A},b\in\overline{B}$,于是

$$a-b=a+(-b)\in A+(-B)\triangleq C\in\mathscr{R},$$

又$-(a-b)=b+(-a)\in B+(-A)\triangleq -C\in\mathscr{R}$,从而$a-b\in\overline{C}\subseteq\overline{R}$,另外$ab\in\overline{A}\,\overline{B}\subseteq AB\triangleq D\in\mathscr{R}$,$-(ab)=(-a)b\in(-A)B=-D\in\mathscr{R}$,从而$ab\in\overline{D}\subseteq\overline{R}$,所以$\overline{R}$是$R$的子环.

由式(3.42)知$(\overline{Q},+)$是$(R,+)$的子群。另外$\forall c\in\overline{Q}\subseteq Q,r\in\overline{R}\subseteq R^{*}$,$\exists\overline{A}\subseteq\overline{R}$,使得$r\in\overline{A}$,于是$cr\in\overline{Q}\,\overline{A}\subseteq QA=Q$,又$-(cr)=(-c)r\in QA=Q$,从而$cr\in\overline{Q}$,同理$rc\in\overline{Q}$,所以$\overline{Q}$是$\overline{R}$的理想.

显然$a+Q\subseteq A+Q=A$;另外,$\forall b\in A$,

$$b=0+b=(a-a)+b=a+(-a+b)\in a+(-A+A)=a+Q,$$

即$A\subseteq a+Q$,故$A=a+Q$,同理$A=Q+a$,所以$\mathscr{R}=\left\{a+Q\mid a\in\overline{R}\right\}$.

设$\mathscr{R}$是环R上的正规幂环,记

$$\mathscr{R}\triangleq\overline{R}\mid_{Q}=\left\{a+Q\mid a\in\overline{R}\right\}\tag{3.44}$$

定理 3.4.5　设$\mathscr{R}$是环R上的一致幂环,则$\forall A\in\mathscr{R},\overline{A}=A,\overline{R}=R^{*}$.

证明　显然$\overline{A}\subseteq A$,另外,$\forall a\in A$,由$A+(-A)=Q$,又$0\in Q$,$\exists b\in A$,$-b\in -A$,使得$b+(-b)=0$,于是$a+(-b)\in A+(-A)=Q$,由此$\exists c\in Q$,使得$a+(-b)=c$,即$-a=(-b)+(-c)\in -A+Q=-A$,从而$a\in\overline{A}$,即$A\subseteq\overline{A}$,所以$\overline{A}=A$.再由$\overline{R}$和R^{*}的定义得$\overline{R}=R^{*}$.

定理 3.4.6(结构定理3) 设 $\mathscr{B}$ 是环 R 上的一致幂环,则 R^* 是 R 的子环,Q 是 R^* 的理想,且

$$\mathscr{B}=R^*/Q=\{a+Q\mid a\in R^*\} \tag{3.45}$$

推论 3.4.2 (1)有限环上的幂环均为一致幂环;(2)零元有限的幂环均为一致幂环.

定理 3.4.7 设 H 是环 R 的子环,$(Q,+)$ 是 $(R,+)$ 的子半群,且 Q 满足 $Q^2=Q$,$QH\cup HQ\subseteq Q$,则 $\forall a,b\in H$,有

$$(a+Q)(b+Q)=ab+Q \tag{3.46}$$

证明 因为 $(a+Q)(b+Q)=ab+aQ+Qb+Q^2=ab+aQ+Qb+Q$.

现证 $aQ+Qb+Q=Q$.

由于 $QH\cup HQ\subseteq Q$,而 $0\in H$,故 $0\in Q$,又 $(Q,+)$ 是 $(R,+)$ 的子半群,则 $2Q=Q+Q=Q$. 又因为 $HQ\subseteq Q$,$QH\subseteq Q$,则 $aQ+Qb\subseteq HQ+QH\subseteq Q$,故

$$aQ+Qb+Q\subseteq Q+Q=Q;$$

另外,$aQ+Qb+Q\supseteq\{a0+0b+c\mid c\in Q\}=\{c\mid c\in Q\}=Q$,故 $aQ+Qb+Q=Q$,所以 $(a+Q)(b+Q)=ab+Q$.

由于正规幂环和一致幂环满足定理3.4.7的条件,则得如下推论.

推论 3.4.3 设 $\mathscr{B}$ 是环 R 上的正规(一致)幂环,则 $\forall a,b\in\overline{R}(R^*)$,

$$(a+Q)(b+Q)=ab+Q.$$

定理 3.4.8(构造定理) 设 H 是环 R 的子环,$Q\subseteq R$,若 Q 满足:$Q^2=Q$,$QH\cup HQ\subseteq Q$,

(1)若 $(Q,+)$ 是 $(R,+)$ 的子半群,即 $(Q,+,\cdot)$ 是 $(R,+,\cdot)$ 的子半环,则

$$H|_Q=\{a+Q\mid a\in H\} \tag{3.47}$$

是 R 上的正规幂环;

(2)若 $(Q,+)$ 是 $(R,+)$ 的子群,即 $(Q,+,\cdot)$ 是 $(R,+,\cdot)$ 的子环,则

$$H/Q=\{a+Q\mid a\in H\} \tag{3.48}$$

是 R 上的一致幂环.

证明 只证(1).(2)的证明类似. 因为 $0\in QH\cup HQ\subseteq Q$,故 $(Q,+)$ 是 $(R,+)$ 的独异点,所以 $Q+Q=Q$,另外 $\forall a+Q,b+Q\in H|_Q$,

$$(a+Q)+(b+Q)=(a+b)+Q\in H|_Q,$$

$$(a+Q)(b+Q)=ab+Q\in H|_Q.$$

令 $f:H\to H|_Q$,$f(a)=a+Q$,显然 f 是满射,$\forall a,b\in H$,

$$f(a+b)=a+b+Q=(a+Q)+(b+Q)=f(a)+f(b),$$

$$f(ab)=ab+Q=(a+Q)(b+Q)=f(a)f(b),$$

所以f是H到$H|_Q$的满同态,从而$H|_Q$是环,即$H|_Q$是R上的正规幂环.

例 3.4.1　设R_0是非零实数,在R_0中定义加法$\oplus$和乘法$\odot$分别为:$\forall a,b \in R_0$,

$$a\oplus b = ab, a\odot b = |a|^{\ln|b|}$$

显然,$(R_0,\oplus)$是交换群,零元为1.

容易验证$(R_0,\odot)$是半群和"$\odot$"对"$\oplus$"的分配律,所以$(R_0,\oplus,\odot)$是环.

(1) 取$Q_0=(1,+\infty)$,则R_0的零元$1\notin Q_0$,显然,$Q_0\oplus Q_0=Q_0$,由此$(Q_0,\oplus)$是$(R_0,\oplus)$的子半群,但不是子独异点.

由于$Q_0\odot Q_0=\{|a|^{\ln|b|} \mid a,b\in Q_0\}=\{a^{\ln b}\mid a,b\in Q_0\}\subseteq Q_0$,另外,$\forall x\in Q_0$,有$x=e^{\ln x}=e\odot x\in Q_0\odot Q_0$,即$Q_0\subseteq Q_0\odot Q_0$,所以$Q_0\odot Q_0=Q_0$.

取$H=\{-1,1\}$,则$(H,\oplus,\odot)$是$(R_0,\oplus,\odot)$的子环,令

$$\mathscr{R}\triangleq\{a\oplus Q_0\mid a\in H\}=\{(1,+\infty),(-\infty,-1)\}\triangleq\{Q_0,A\}$$

则$(\mathscr{R},\oplus)$,$(\mathscr{R},\odot)$的运算如表 3.1、表 3.2 所示.

表 3.1

$\oplus$	Q_0	A
Q_0	Q_0	A
A	A	Q_0

表 3.2

$\odot$	Q_0	A
Q_0	Q_0	Q_0
A	Q_0	Q_0

所以$(\mathscr{R},\oplus)$是交换群,$(\mathscr{R},\odot)$是半群,容易验证$\odot$对$\oplus$的分配律,所以$(\mathscr{R},\oplus,\odot)$是$R_0$上的一个幂环.注意,$R_0$的零元$1\notin R_0^*=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 取$Q_1=[1,+\infty)$,则$(Q_1,\oplus)$是$(R_0,\oplus)$的独异点,而$Q_1\odot Q_1=Q_1$,$H=\{-1,1\}$,因为

$$H\odot Q_1=\{|h|^{\ln|a|}\mid h\in H,a\in Q_1\}=\{1\}\subseteq Q_1;$$

$$Q_1\odot H=\{|a|^{\ln|h|}\mid h\in H,a\in Q_1\}=\{1\}\subseteq Q_1,$$

所以$H\odot Q_1\cup H\odot Q_1\subseteq Q_1$,因此由构造定理 3.4.8 知,

$$H|_{Q_1}=\{i\oplus Q_1\mid i\in H\}=\{[1,+\infty),(-\infty,-1]\}$$

是R_0上的正规幂环.其运算表类似于表 3.1、表 3.2.

(3) 取$Q_2=(0,+\infty)$,则$(Q_2,\oplus)$是$(R_0,\oplus)$的子群,同样可以验证$Q_2\odot Q_2=Q_2$,$H\odot Q_2\cup Q_2\odot H\subseteq Q_2$,由构造定理 3.4.8 知

$$H/Q_2=\{i\oplus Q_2\mid i\in H\}=\{(0,+\infty),(-\infty,0)\}$$

是R_0上的一致幂环.其运算表类似于表 3.1、表 3.2.

定理 3.4.9 设 $\mathscr{R}$ 是环 R 上的正规幂环,令 $f:\overline{R}\to\mathscr{R}$,$f(a)=a+Q$,则 f 是满同态,且 $\ker f=\overline{Q}$,从而 $\mathscr{R}\cong\overline{R}/\overline{Q}$.

证明 显然 f 是满射,$\forall a,b\in\overline{R}$,

$$f(a+b)=(a+b)+Q=(a+Q)+(b+Q)=f(a)+f(b)$$

$$f(ab)=ab+Q=(a+Q)(b+Q)=f(a)f(b)$$

所以 f 是满同态,现证 $\ker f=\overline{Q}$.

$\forall a\in\ker f$,则 $f(a)=Q$,又 $f(a)=a+Q$,从而 $a+Q=Q$,故 $a+0=a\in Q$,又由 $a+Q=Q$ 知 $-a+(2a+Q)=Q$,而 $2a+Q=(a+Q)+(a+Q)=Q+Q=Q$,故 $-a+Q=Q$,则 $-a+0=-a\in Q$,于是 $a\in\overline{Q}$,$\ker f\subseteq\overline{Q}$. 另外,$\forall a\in\overline{Q}$,$a+Q\subseteq\overline{Q}+Q\subseteq Q+Q=Q$,又 $a\in Q$,$-a\in Q$,则 $\forall b\in Q$,

$$b=b+0=b+a+(-a)=a+b+(-a)\in a+Q+Q=a+Q,$$

即 $Q\subseteq a+Q$,故 $a+Q=Q$,所以 $f(a)=a+Q=Q$,即 $a\in\ker f$,由此 $\overline{Q}\subseteq\ker f$,从而 $\ker f=\overline{Q}$,所以 $\mathscr{R}\cong\overline{R}/\overline{Q}$.

推论 3.4.4(同构定理) 设 $\overline{R}|_Q$ 是环 R 上的正规幂环,则存在 R 上的一致幂环 $\overline{R}/\overline{Q}$,使得 $\overline{R}|_Q\cong\overline{R}/\overline{Q}$.

推论 3.4.5 (1)设 R^*/Q 是环 R 上的一致幂环,则 R^*/Q 的任一子环的形式为 H/Q,其中 H 是 R^* 的包含 Q 的子环,当且仅当 H 是 R 的理想时,H/Q 是 R^*/Q 的理想.

(2) 设 $\overline{R}|_Q$ 是环 R 上的正规幂环,则 $\overline{R}|_Q$ 的任一子环的形式为 $H|_Q$,其中 H 是 $\overline{R}$ 的包含 Q 的子环,当且仅当 H 是 $\overline{R}$ 的理想时,$H|_Q$ 是 $\overline{R}|_Q$ 的理想.

由于一致幂环 R^*/Q 是 R 的子环 R^* 关于 Q 的商环,而 R 上的任意一个正规幂环 $\overline{R}|_Q$ 都同构于 R 上的一致幂环 $\overline{R}/\overline{Q}$,所以代数中许多有关商环的结论都可以推广到一致幂环和正规幂环中.

定理 3.4.10 设 $f:R\to R_1$ 是环同态,

(1) 若 R^*/Q 是 R 上的一致幂环,记 $f^*=f|_{R^*}$,$\ker f=Q$,则 $R^*/Q\cong f(R^*)$。

(2) 若 $\overline{R}|_Q$ 是 R 上的正规幂环,记 $\overline{f}=f|_{\overline{R}}$,若 $\ker f=\overline{Q}$,则 $\overline{R}|_Q\cong f(\overline{R})$.

证明 (1)由于 $f^*=f|_{R^*}$,则 f^* 是 R^* 到 R_1 的同态映射,且 $f(R^*)=$

$f^*(R^*)$,又 $\ker f=\ker f^*=Q$,故由同态基本定理知 $R^*\big/Q\cong f(R^*)$.

(2)由同构定理,存在一致幂环 $\overline{R}\big/\overline{Q}$,使得 $\overline{R}\mid_Q\cong\overline{R}\big/\overline{Q}$,由此 $\overline{R}\mid_Q\cong\overline{R}\big/\overline{Q}\cong f(\overline{R})$.

定义 3.4.3　称 $R=\overline{R}$ 的正规幂环为广义商环.

由定理 3.4.10 得下列推论:

推论 3.4.6　环 R 上的广义商环 $R\mid_Q$ 都是 R 的同态像;反之,若 R_1 是 R 的同态像,则

$$R_1\cong R\mid_Q.$$

定理 3.4.11　设 $\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2$ 是环 R 上的正规(一致)幂环,Q_1 和 Q_2 分别是 $\mathscr{R}_1$ 和 $\mathscr{R}_2$ 的零元,则 $Q_1\neq Q_2$ 的充分必要条件是 $\mathscr{R}_1\cap\mathscr{R}_2=\emptyset$.

证明与定理 3.2.1 的证明类似,从略.

由此我们可以用零元对正规(一致)幂环进行分类,以 Q 为零元的正规幂环记为 $\mathscr{R}(Q)$,以 Q 为零元的一致幂环记为 $\mathscr{R}^*(Q)$.

定义 3.4.4　设 R 是环 R 的子环,若 $Q\subseteq R$,且满足:$Q^2=Q$,$QH\cup HQ\subseteq Q$,

(1) 若$(Q,+)$是$(R,+)$的子半群,则称 Q 是 R 的关于 H 的半理想,简称为 H 的半理想;

(2) 若$(Q,+)$是$(R,+)$的子群,则称 Q 是 R 的关于 H 的理想,简称为 H 的理想.

注:(1)由 $0\in Q$,所以 H 的半理想 Q 是 R 的含零元的子半环;

(2) Q 是 R 的关于 H 的理想,则 Q 是 R 的子环.

定义 3.4.5　(1)若 Q 是环 R 的子半环,且 $Q^2=Q$,令

$$\overline{R}\triangleq\max\{H\mid H\text{ 是 }R\text{ 的子环},HQ\cup QH\subseteq Q\}\tag{3.49}$$

则称 $\overline{R}$ 为 R 的以 Q 为半理想的最大子环.

(2)若 Q 是环 R 的子环,且 $Q^2=Q$,令

$$R^*\triangleq\max\{H\mid H\text{ 是 }R\text{ 的子环},HQ\cup QH\subseteq Q\}\tag{3.50}$$

则称 R^* 为 R 的以 Q 为理想的最大子环.

定理 3.4.12　(1)若 $\overline{R}$ 是环 R 的以 Q 为半理想的最大子环,则 $\overline{R}\mid_Q$ 是 $\mathscr{R}(Q)$ 的最大正规幂环,$\{\theta\}$ 是 $\mathscr{R}(Q)$ 的最小正规幂环.

(2)若 R^* 是环 R 的以 Q 为理想的最大子环,则 $R^*\big/Q$ 是 $\mathscr{R}^*(Q)$ 的最大一致幂环,$\{\theta\}$ 是 $\mathscr{R}^*(Q)$ 的最小一致幂环.

推论 3.4.7　(1)若 Q 是环 R 的半理想,则广义商环 $R\mid_Q$ 是 $\mathscr{R}(Q)$ 的最大正规幂环;

(2)若 Q 是环 R 的理想,则商环 R/Q 是 $\mathscr{R}^*(Q)$ 的最大一致幂环.

定理 3.4.13 设 $H_1|_Q, H_2|_Q \in \mathscr{R}(Q)$, $(H_1/Q, H_2/Q \in \mathscr{R}^*(Q))$.

(1) H_1 是 H_2 的子环的充分必要条件是 $H_1|_Q\left(H_1/Q\right)$ 是 $H_2|_Q\left(H_2/Q\right)$ 的子环;

(2) H_1 是 H_2 的理想的充分必要条件是 $H_1|_Q\left(H_1/Q\right)$ 是 $H_2|_Q\left(H_2/Q\right)$ 的理想.

证明与定理 3.2.4 的证明类似,从略.

定理 3.4.14 (1)设 $H_1|_Q, H_2|_Q \in \mathscr{R}(Q)$,则 $(H_1 \cap H_2)|_Q \in \mathscr{R}(Q)$,且

$$(H_1 \cap H_2)|_Q = H_1|_Q \cap H_2|_Q \tag{3.51}$$

(2)设 $H_1/Q, H_2/Q \in \mathscr{R}^*(Q)$,则 $(H_1 \cap H_2)/Q \in \mathscr{R}^*(Q)$,且

$$(H_1 \cap H_2)/Q = H_1/Q \cap H_2/Q. \tag{3.52}$$

证明与定理 3.2.8 的证明类似,从略.

定理 3.4.15 (1)设 $H_1|_Q, H_2|_Q \in \mathscr{R}(Q)$, H_2 是环 R 的理想,则 $(H_1 + H_2)|_Q \in \mathscr{R}(Q)$,且

$$(H_1 + H_2)|_Q = H_1|_Q + H_2|_Q \tag{3.53}$$

(2)设 $H_1/Q, H_2/Q \in \mathscr{R}^*(Q)$, H_2 是环 R 的理想,则 $(H_1 + H_2)/Q \in \mathscr{R}^*(Q)$,且

$$(H_1 + H_2)/Q = H_1/Q + H_2/Q \tag{3.54}$$

证明与定理 3.2.9 的证明类似,从略.

由此可以利用 Zassenhaus 同构定理,把正规(一致)幂环的理想链加细为合成理想链,得到 Schreier 定理和 Jordan-Hölder 定理的推广.

定理 3.4.16 对于正规(一致)幂环类 $\mathscr{R}(Q)$ $(\mathscr{R}^*(Q))$ 的任意两个理想链有同构加细.

定理 3.4.17 如果正规(一致)幂环类 $\mathscr{R}(Q)$ $(\mathscr{R}^*(Q))$ 有合成理想链,则该类的任意理想链都可以加细为合成链,且同类中任意两个合成理想链同构.

§3.5 模糊幂群

设 $(X, \cdot)$ 是一个群,由多元扩张原理,群 X 中的运算可以扩张到 $F(X)$ 中,

$\forall A,B\in F(X)$,

$$AB\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(A_\lambda B_\lambda)\tag{3.55}$$

由第一章知:

(1) $$(AB)(x)=\bigvee_{yz=x}(A(y)\wedge B(z))=\bigvee_{y\in x}A(y)\wedge B(y^{-1}x));\tag{3.56}$$

(2) $$AB=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(A_\lambda B_\lambda);\tag{3.57}$$

(3) $$(AB)_\lambda=A_\lambda B_\lambda,(AB)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}B_{\underset{\cdot}{\lambda}}.\tag{3.58}$$

定理 3.5.1　设 X 是群, $\forall A,B,C\in F(X)$,则

(1) $$(AB)C=A(BC);\tag{3.59}$$

(2)若 X 是交换群,则 $$AB=BA.\tag{3.60}$$

证明　$\forall\lambda\in[0,1]$, $((AB)C)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=(AB)_{\underset{\cdot}{\lambda}}C_{\underset{\cdot}{\lambda}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}B_{\underset{\cdot}{\lambda}}C_{\underset{\cdot}{\lambda}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}(BC)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=(A(BC))_{\underset{\cdot}{\lambda}}$,

所以 $(AB)C=A(BC)$. 若 X 是交换群, $(AB)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}B_{\underset{\cdot}{\lambda}}=B_{\underset{\cdot}{\lambda}}A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=(BA)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$,所以 $AB=BA$.

定义 3.5.1　设 X 是群, $\beta\subseteq F(X)$,若 β 关于运算(3.55)构成一个群,则称 β 是 X 的一个模糊幂群,简称为 F 幂群. 其单位元用 E 表示, $A\in\beta$, A 的逆元用 A^{-1} 表示.

显然,群 X 上的幂群是 F 幂群;我们约定空集 $\emptyset$ 也是 X 的 F 幂群.

定义 3.5.2　设 β 是群 X 的 F 幂群, $A\in\beta$, A 的高定义为

$$\text{high }A=\bigvee_{x\in X}A(x)\tag{3.61}$$

若 $\bigvee_{x\in X}A(x)=\max_{x\in X}A(x)$,则称 A 是 β 的达高元;若 β 的任意元均为达高元,则称 β 是 X 的一个达高 F 幂群.

定理 3.5.2　群 X 上的 F 幂群 β 的任意元的高相等.

证明　$\forall A\in\beta$,因为 $AE=A$,则 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=(AE)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}E_{\underset{\cdot}{\lambda}}$,因此,若 $E_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\emptyset$,则 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\emptyset$;又因为 $AA^{-1}=E$,则 $E_{\underset{\cdot}{\lambda}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}(A^{-1})_{\underset{\cdot}{\lambda}}$,因此,若 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\emptyset$,则 $E_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\emptyset$,所以 $\text{high}A=\text{high}E$,即 β 的任意元的高相等.

定义 3.5.3　设 β 是群 X 的 F 幂群,称 $\text{high}E$ 为 β 的高,记为 $h(\beta)$.

定理 3.5.3　设 β 是群 X 的一个 F 幂群, $\forall\lambda\in[0,1]$,记

$$\beta_{\underset{\cdot}{\lambda}}\triangleq\{A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\mid A\in\beta\}\tag{3.62}$$

则 $\beta_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 是 X 上的一个幂群,且 $E_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 是 $\beta_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 的单位元, $(A^{-1})_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 是 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 的逆元,即

$$(A_{\underset{\cdot}{\lambda}})^{-1}=(A^{-1})_{\underset{\cdot}{\lambda}}\tag{3.63}$$

证明　不妨假定当 $\lambda>h(\beta)$ 时, $\beta_\lambda=\{\emptyset\}$ 幂群.

$\forall A_{\underset{\cdot}{\lambda}},B_{\underset{\cdot}{\lambda}}\in\beta_{\underset{\cdot}{\lambda}}$,由于 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}B_{\underset{\cdot}{\lambda}}=(AB)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$,则 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}B_{\underset{\cdot}{\lambda}}\in\beta_{\underset{\cdot}{\lambda}}$,又因为 $(A_{\underset{\cdot}{\lambda}}(A^{-1})_{\underset{\cdot}{\lambda}})=$

$(AA^{-1})_\lambda = E_\lambda, E_\lambda A_\lambda = (EA)_\lambda = A_\lambda$，同理 $A_\lambda E_\lambda = A_\lambda$，所以 E_λ 是 β_λ 的单位元. $(A^{-1})_\lambda$ 是 A_λ 的逆元，于是 $(A^{-1})_\lambda = (A_\lambda)^{-1}$，因此 β_λ 是 X 的幂群.

推论 3.5.1 设 β 是群 X 的高为 h 的达高 F 幂群，则

$$\beta_h \triangleq \{A_h \mid A \in \beta\} \tag{3.64}$$

是 X 的一个幂群.

定理 3.5.4 设 β 是群 X 的 F 幂群，则 β 的单位元 E 是 X 的 F 子半群.

证明 由于 $E^2 = E$，所以 E 是 X 的 F 子半群.

定义 3.5.4 设 β 是群 X 的 F 幂群，

(1) 若 β 的单位元 E 是 X 的 F 独异点，则称 β 是 X 的正规 F 幂群；

(2) 若 β 的单位元 E 是 X 的 F 子群，则称 β 是 X 的一致 F 幂群.

显然，群 X 上的 F 商群是 X 的一致 F 幂群.

定理 3.5.5（构造定理） 设 H 是群 X 的子群，$E \in F(X)$，若 E 关于 H 正规，即 $\forall a \in H, aE = Ea$，记

$$\beta \triangleq \{aE \mid a \in H\} \tag{3.65}$$

(1) 若 E 是 X 的 F 子半群，且 $E^2 = E$，则 β 是 X 的 F 幂群；

(2) 若 E 是 X 的 F 独异点，则 β 是 X 的正规 F 幂群；

(3) 若 E 是 X 的 F 子群，则 β 是 X 的一致 F 幂群.

证明略.

定理 3.5.6 设 β 是群 X 的 F 幂群.

(1) β 是 X 的正规 F 幂群的充分必要条件是 $\forall \lambda \in [0,1]$，$\beta_\lambda$ 是 X 的正规幂群；

(2) β 是 X 的一致 F 幂群的充分必要条件是 $\forall \lambda \in [0,1]$，$\beta_\lambda$ 是 X 的一致幂群.

定理 3.5.7 在定理 3.5.3 的基础上容易证明，从略.

设 β 是群 X 的达高 F 幂群，h 为 β 的高，记

$$X^* \triangleq \bigcup_{A \in \beta} A_h \subseteq P(X) \tag{3.66}$$

$$\widetilde{X}^* \triangleq \bigcup_{A \in \beta} A \subseteq F(X) \tag{3.67}$$

定理 3.5.7 设 β 是群 X 的达高 F 幂群，则：

(1) 若 E 是群 X 的子半群，则 X^* 是 X 的子半群，$\widetilde{X}^*$ 是 X 的 F 子半群；

(2) 若 E 是群 X 的独异点，则 X^* 是 X 的独异点，$\widetilde{X}^*$ 是 X 的 F 独异点；

(3) 若 E 是群 X 的子群，则 X^* 是 X 的子群，$\widetilde{X}^*$ 是 X 的 F 子群.

证明 (1) $\forall a, b \in X^*$，$\exists A, B \in \beta$，使得 $a \in A_h, b \in B_h$，则当 $\lambda \leqslant h$ 时，$a \in$

A_λ，$b\in B_\lambda$，从而 $ab\in A_\lambda B_\lambda=(AB)_\lambda$，故 $ab\in\bigcap_{\lambda\leqslant h}(AB)_\lambda=(AB)_h\subseteq X^*$，故 X^* 是 X 的子半群．由于 $\widetilde{X}^*_\lambda=(\bigcup_{A\in\beta}A)_\lambda=\bigcup_{A\in\beta}A_\lambda$，因 $\beta_\lambda\triangleq\{A_\lambda\mid A\in\beta\}$是 X 的幂群，则 $\widetilde{X}^*_\lambda=\bigcup_{A\in\beta}A_\lambda$ 是 X 的子半群，所以 $\widetilde{X}^*$ 是 X 的 F 子半群．

(2)由于 E 是 X 的 F 独异点，则 $e\in E_h\subseteq X^*$，所以 X^* 是 X 的独异点．类似于(1)的证明 $\widetilde{X}^*_\lambda$ 是 X 的独异点，所以 $\widetilde{X}^*$ 是 X 的 F 独异点．

(3) $\forall a\in X^*$，$\exists A\in\beta$，$a\in A_h$，由 β_h 是一致幂群，故 $a^{-1}\in A_h^{-1}\subseteq X^*$，所以 X^* 是 X 的子群；同样类似(1)的证明 $\widetilde{X}^*_\lambda$ 是 X 的子群，则 $\widetilde{X}^*$ 是 X 的 F 子群．

设 β 是群 X 的达高 F 幂群，h 为 β 的高，记

$$\overline{A}_h\triangleq\{a\in A_h\mid a^{-1}\in(A_h)^{-1}\}\tag{3.68}$$

$$\overline{X}\triangleq\bigcup\{\overline{A}_h\mid A\in\beta\}\tag{3.69}$$

称 $\overline{A}_h$ 为 A_h 的核，$\overline{X}$ 为 X^* 的核．

定理 3.5.8(结构定理 1)　设 β 是群 X 的达高正规 F 幂群，则

(1) $\overline{X}$ 是 X 的子群，$\overline{E}_h$ 是 $\overline{X}$ 的子群；

(2) $\forall A\in\beta$，$a\in\overline{A}_h$ 时，$A=aE=Ea$，即

$$\beta\triangleq\overline{X}\mid_E=\{aE\mid a\in\overline{A}_h\subseteq\overline{X}\}\tag{3.70}$$

证明　(1)由式(3.68)、式(3.69)可得．

(2) $\forall a\in\overline{A}_h\subseteq\overline{X}$，则 $\forall\lambda\leqslant h$，$a\in\overline{A}_\lambda\subseteq A_\lambda$，从而 $aE_\lambda\subseteq A_\lambda E_\lambda=(AE)_\lambda=A_\lambda$；另外，$\forall b\in A_\lambda$，$a\in\overline{A}_h$，则 $a\in\overline{A}_\lambda$，$b=eb=aa^{-1}b\in a(A_\lambda)^{-1}A_\lambda=aE_\lambda$，即 $A_\lambda\subseteq aE_\lambda$，所以 $A_\lambda=aE_\lambda$，当 $\lambda>h$ 时，$A_\lambda=E_\lambda=\varnothing$，则 $A_\lambda=aE_\lambda$ 成立，所以 $A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(aE_\lambda)=aE$．同理 $A=Ea$，于是 $\beta=\{aE\mid a\in\overline{A}_h\subseteq\overline{X}\}$．

定理 3.5.9　设 β 是群 X 的正规 F 幂群，则 $\forall a,b\in\overline{X}$，$\lambda\in[0,1]$，

(1) $aE=bE\Leftrightarrow aE_\lambda=bE_\lambda\Leftrightarrow a\overline{E}_\lambda=b\overline{E}_\lambda$；

(2) $Ea=Eb\Leftrightarrow E_\lambda a\Leftrightarrow E_\lambda b=\overline{E}_\lambda a=\overline{E}_\lambda b$．

证明　(1)已知 $aE=bE$，则 $aE_\lambda=bE_\lambda$，若 $\lambda<h$(若 β 达高时 $\lambda\leqslant h$，h 是 β 的高)，由 $e\in E_\lambda$，得 $a^{-1}b\in E_\lambda$，$b^{-1}a=(a^{-1}b)^{-1}\in E_\lambda$，故 $a^{-1}b\in\overline{E}_\lambda$，即 $a\,\overline{E}_\lambda=b\,\overline{E}_\lambda$，当 $\lambda>h$ 时，$E_\lambda=\varnothing$，$a\,\overline{E}_\lambda=b\,\overline{E}_\lambda$ 成立，所以 $aE=bE\Rightarrow aE_\lambda=bE_\lambda\Rightarrow a\,\overline{E}_\lambda=b\,\overline{E}_\lambda$．

若 $a\,\overline{E}_\lambda=b\,\overline{E}_\lambda$，当 $\lambda<h$ 时(β 达高时，$\lambda\leqslant h$)，$a^{-1}b\subseteq\overline{E}_\lambda\subseteq E_\lambda$，$b^{-1}a\in\overline{E}_\lambda\subseteq E_\lambda$，故 $a\,E_\lambda=b\,E_\lambda$，当 $\lambda>h$ 时，$E_\lambda=\varnothing$，故 $aE=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda aE_\lambda=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda bE_\lambda=bE$，

从而 $a\overline{E}_\lambda = b\overline{E}_\lambda \Rightarrow aE_\lambda = bE_\lambda \Rightarrow aE = bE$. 所以 $aE = bE \Leftrightarrow aE_\lambda = bE_\lambda \Leftrightarrow a\overline{E}_\lambda = b\overline{E}_\lambda$. 同理可证(2).

推论 3.5.2 β 是群 X 的达高正规 F 幂群,则 $\overline{E}_h$ 是 $\overline{X}$ 的正规子群.

定理 3.5.10(同构定理 1) 设 β 是群 X 的高为 h 的达高正规 F 幂群,则 β 同构于正规幂群 $\overline{X}\mid_{E_\lambda}$ 和一致幂群 $\overline{X}/\overline{E}_\lambda$, $\lambda \leqslant h$,即

$$\beta = \overline{X}\mid_E \cong \overline{X}\mid_{E_\lambda} \cong \overline{X}/\overline{E}_\lambda \tag{3.71}$$

定义 3.5.5 设 X 是群, $A \in F(X)$,称

$$A^{(-1)} \triangleq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda (A_\lambda)^{(-1)} \tag{3.72}$$

为 A 的逆集.

由扩张原理知:

$$A^{(-1)} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda (A_\lambda)^{(-1)}; \tag{3.73}$$

$$(A^{(-1)})_\lambda = (A_\lambda)^{(-1)}. \tag{3.74}$$

定理 3.5.11 设 β 是群 X 的一致幂群,则 $\forall A \in \beta, A^{(-1)} = A^{-1}$.

证明 因为 β_λ 是 X 的一致幂群,则 $(A^{(-1)})_\lambda = (A_\lambda)^{-1}$,从而 $A^{(-1)} = A^{-1}$.

定理 3.5.12 设 β 是群 X 上的高为 h 的达高一致 F 幂群,则 $\forall A \in \beta, \overline{A}_h = A_h, \overline{X} = X^*$.

证明 因为 $\overline{A}_h = A_h \Leftrightarrow (A_h)^{(-1)} = (A_h)^{-1}$,由于 β 是一致 F 幂群,则 $A^{(-1)} = A^{-1}$,故 $(A_h)^{(-1)} = (A_h)^{-1}$,从而 $\overline{A}_h = A_h, \overline{X} = X^*$.

定理 3.5.13(结构定理 2) 设 β 是群 X 上的高为 h 的达高一致 F 幂群,则

(1) X^* 是 X 的子群, E_h 是 X^* 的正规子群;

(2) $\forall A \in \beta, a \in A_h$ 时, $A = aE = Ea$,即

$$\beta \triangleq X^*/E = \{aE \mid a \in A_h \subseteq X^*\} \tag{3.75}$$

推论 3.5.3 群 X 的达高一致 F 幂群是 X^* 关于 E 的 F 商群.

定理 3.5.14 设 β 是群 X 的一致 F 幂群,则 $\forall a, b \in X^*, \lambda \in [0,1]$,有

(1) $aE = bE \Leftrightarrow aE_\lambda = bE_\lambda$;

(2) $Ea = Eb \Leftrightarrow E_\lambda a = E_\lambda b$.

定理 3.5.15(同构定理 2) 设 β 是群 X 上的高为 h 的一致 F 幂群,则 β 同构于一致幂群 X^*/E_λ $(\lambda \leqslant h)$,即

$$\beta \triangleq X^*/E \cong X^*/E_\lambda \tag{3.76}$$

定理 3.5.16　设 $f:X\to Y$ 是群的同态映射，β 是 X 上的 F 幂群，记

$$\beta' \triangleq f(\beta)=\{f(A)\mid A\in\beta\} \tag{3.77}$$

则 β' 是 Y 的 F 幂群，$\beta\sim\beta'$，且：

(1) 若 β 是正规 F 幂群，则 β' 是正规 F 幂群；

(2) 若 β 是一致 F 幂群，则 β' 是一致 F 幂群；

(3) β 和 β' 等高，且 β 达高，则 β' 达高.

证明略.

定理 3.5.17　设 $f:X\to Y$ 是群的满同态映射，β' 是 Y 的 F 幂群，记

$$\beta=f^{-1}(\beta')\triangleq\{f^{-1}(B)\mid B\in\beta'\} \tag{3.78}$$

则 β 是 X 的 F 幂群，$\beta\sim\beta'$，且：

(1) β' 是正规 F 幂群，则 β 是正规 F 幂群；

(2) β' 是一致 F 幂群，则 β 是一致 F 幂群；

(3) β 和 β' 等高，且 β' 达高，则 β 达高.

证明略.

§3.6　模糊幂群的分类

定理 3.6.1　设 β 和 β' 是群 X 的达高正规（一致）F 幂群，E、E' 分别是 β 和 β' 的单位元，则 $E\neq E'$ 的充分必要条件是 $\beta\cap\beta'=\varnothing$.

证明　充分性显然.

假若 $\beta\cap\beta'\neq\varnothing$，则 $\exists A\in\beta, A\in\beta'$，由结构定理知，$\forall a\in\overline{A}_h\,(a\in A_h)$，$A=aE=aE'$，由此 $aE_\lambda=aE'_\lambda$，$E_\lambda=E'_\lambda$，从而 $E=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda E_\lambda=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda E'_\lambda=E'$，与已知条件矛盾，所以 $\beta\cap\beta'=\varnothing$.

由此，群 X 上的达高正规（一致）幂群可以用单位元分类. 以 E 为单位元的正规幂群类用 $\beta(E)$ 表示，以 E 为单位元的一致 F 幂群类用 $\beta^*(E)$ 表示.

定理 3.6.2　设 E 是群 X 的 F 正规元，则

$$N(E)\triangleq\{a\in X\mid aE=Ea\} \tag{3.79}$$

是 X 的一个子群.

证明　$\forall a,b\in N(E)$，则 $(ab)E=aEb=E(ab)$，故 $ab\in N(E)$；$\forall x\in X$，

$(a^{-1}E)(x)=E(ax)=(Eaxaa^{-1})=(Ea)(axa)=(aE)(axa)=E(a^{-1}axa)=E(xa)=(Ea^{-1})(x)$，即 $a^{-1}E=Ea^{-1}$，故 $a^{-1}\in N(E)$，所以 $N(E)$ 是 X 的子群.

定理 3.6.3　(1) 设 E 是群 X 的 F 独异点，则 $\overline{X}$ 是 $N(E)$ 的子群的充分必要条件是 $\overline{X}\mid_E$ 是 $N(E)\mid_E$ 的子群.

(2)设 E 是群 X 的 F 子群,则 X^* 是 $N(E)$ 的子群的充分必要条件是 $X^* \big/ E$ 是 $N(E) \big/ E$ 的子群.

证明 (1) $\forall aE, bE \in \overline{X}|_E (a, b \in \overline{X})$,由于 $(aE)(bE)^{-1} = aEb^{-1}E = ab^{-1}E$,则

$$ab^{-1} \in \overline{X} \Leftrightarrow (aE)(bE)^{-1} = ab^{-1}E \in \overline{X}|_E,$$

所以 $\overline{X}$ 是 $N(E)$ 的子群的充分必要条件是 $\overline{X}|_E$ 是 $N(E)|_E$ 的子群.

同理可证(2).

定理 3.6.4 (1)群 X 的以 E 为单位元的正规 F 幂群类 $\beta(E)$ 为

$$\beta(E) = \{\overline{X}|_E \mid \overline{X} < N(E)\} \tag{3.80}$$

$N(E)|_E$ 是 $\beta(E)$ 的最大正规 F 幂群;$\{E\}$ 是 $\beta(E)$ 的最小正规 F 幂群.

(2)群 X 的以 E 为单位元的一致幂群类 $\beta^*(E)$ 为

$$\beta^*(E) = \left\{X^* \big/ E \mid X^* < N(E)\right\} \tag{3.81}$$

$N(E) \big/ E$ 是 $\beta^*(E)$ 的最大一致 F 幂群;$\{E\}$ 是 $\beta^*(E)$ 的最小一致 F 幂群.

推论 3.6.1 若 E 是群 X 的 F 正规独异点,则广义 F 商群 $X|_E$ 是 $\beta(E)$ 的最大正规 F 幂群,$\beta(E)$ 均为 $X|_E$ 的子群.

推论 3.6.2 交换群的正规 F 幂群类 $\beta(E)$ 均为广义 F 商群 $X|_E$ 的子群;$X|_E$ 是 $\beta(E)$ 的最大正规 F 幂群.

推论 3.6.3 若 E 是群 X 的 F 正规子群,则 F 商群 $X \big/ E$ 是 $\beta^*(E)$ 的最大一致 F 幂群,$\beta^*(E)$ 均为 $X \big/ E$ 的子群.

推论 3.6.4 交换群的一致 F 幂群类 $\beta^*(E)$ 均为 F 商群 $X \big/ E$ 的子群;$X \big/ E$ 是 $\beta^*(E)$ 的最大一致 F 幂群.

定理 3.6.5 设 $X_1|_E, X_2|_E \in \beta(E)$,$\left(X_1 \big/ E, X_2 \big/ E \in \beta^*(E)\right)$,则:

(1)X_1 是 X_2 的子群的充分必要条件是 $X_1|_E$ 是 $X_2|_E \left(X_1 \big/ E \text{ 是 } X_2 \big/ E\right)$ 的子群;

(2) X_1 是 X_2 的正规子群的充分必要条件是 $X_1|_E$ 是 $X_2|_E$ $\left(X_1 \big/ E \text{ 是 } X_2 \big/ E\right)$ 的正规子群.

证明　(1)的证明与定理3.6.3的证明类似,从略.

(2)只证正规 F 幂群的情况.

$\forall hE \in X_1|_E, aE \in X_2|_E, (h \in X_1, a \in X_2)$,由于 $(aE)(hE)(aE)^{-1} = aEhEa^{-1}E = (aha^{-1})E$,所以 $aha^{-1} \in X_1 \Leftrightarrow (aE)(hE)(aE)^{-1} = (aha^{-1})E \in X_1|_E$,于是 X_1 是 X_2 的正规子群的充分必要条件是 $X_1|_E$ 是 $X_2|_E$ 的正规子群.

推论3.6.5　(1)正规 F 幂群类 $\beta(E)$ 的正规子群列 $X_0|_E \lhd X_1|_E \lhd \cdots \lhd X_n|_E$ 是合成正规子群列的充分必要条件是 X_{i-1} 是 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的极大正规子群.

(2)一致 F 幂群类 $\beta^*(E)$ 的正规子群列 $X_0/E \lhd X_1/E \lhd \cdots \lhd X_n/E$ 是合成正规子群列的充分必要条件是 X_{i-1} 是 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的极大正规子群.

推论3.6.6　(1)正规 F 幂群类 $\beta(E)$ 的两个正规子群列 $X_0|_E \lhd X_1|_E \lhd \cdots \lhd X_n|_E$ 和 $H_0|_E \lhd H_1|_E \lhd \cdots \lhd H_n|_E$ 同构的充分必要条件是 X 的正规子群列 $X_1 \lhd X_1 \lhd \cdots \lhd X_n$ 和 $H_1 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_n$ 同构.

(2)一致 F 幂群类 $\beta^*(E)$ 的两个正规子群列 $X_0/E \lhd X_1/E \lhd \cdots \lhd X_n/E$ 和 $H_0/E \lhd H_1/E \lhd \cdots \lhd H_n/E$ 同构的充分必要条件是 X 的正规子群列 $X_1 \lhd X_1 \lhd \cdots \lhd X_n$ 和 $H_1 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_n$ 同构.

定理3.6.6　(1)设 $X_1|_E, X_2|_E \in \beta(E)$,则 $(X_1 \cap X_2)|_E \in \beta(E)$,且

$$(X_1 \cap X_2)|_E = X_1|_E \cap X_2|_E \tag{3.82}$$

(2)设 $X_1/E, X_2/E \in \beta^*(E)$, $(X_1 \cap X_2)/E \in \beta^*(E)$,且

$$(X_1 \cap X_2)/E = X_1/E \cap X_2/E \tag{3.83}$$

定理3.6.7　(1)设 $X_1|_E, X_2|_E \in \beta(E)$, X_1 是 $N(E)$ 的正规子群,则 $X_1X_2|_E \in \beta(E)$,且

$$X_1X_2|_E = (X_1|_E)(X_2|_E) \tag{3.84}$$

(2)设 $X_1/E, X_2/E \in \beta^*(E)$, X_1 是 $N(E)$ 的正规子群,则 $X_1X_2/E \in \beta^*(E)$,且

$$X_1X_2/E = \left(X_1/E\right)\left(X_2/E\right) \tag{3.85}$$

证明与定理3.2.8,定理3.2.9的证明类似,从略.

由同构定理3.5.10和定理3.5.15知,每一个正规 F 幂群 $\overline{X}|_E$ 和一致 F 幂群 X^*/E 分别同构于商群 $\overline{X}/\overline{E}_\lambda$, X^*/E_λ,所以我们可以把代数学中的

O. Schreier定理和 Jordan-Hölder 定理推广到 F 幂群中.

定理 3.6.8 对于达高的正规(一致)F 幂群类 $\beta(E)(\beta^*(E))$ 的任意两个正规子群列有同构加细.

定理 3.6.9 如果达高的正规(一致)F 幂群类 $\beta(E)(\beta^*(E))$ 有合成正规子群列,则该类的任意两个正规子群列都可以加细为合成正规子群列,且同一类中的任意两个合成正规子群列同构.

§3.7 模糊幂环

设$(X,+,\cdot)$是环,由多元扩张原理,环 X 中的两个运算可以扩张到 $F(X)$ 中,$\forall A,B\in F(X)$,

$$A+B=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(A_\lambda+B_\lambda) \tag{3.86}$$

$$AB=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda B_\lambda \tag{3.87}$$

$\forall x\in X,\lambda\in[0,1]$,有

(1) $$(A+B)(x)=\bigvee_{y+z=x}(A(y)\wedge B(z))=\bigvee_{y\in X}(A(y)\wedge B(x-y)) \tag{3.88}$$

(2) $$(AB)(x)=\bigvee_{yz=x}A(y)\wedge B(z) \tag{3.89}$$

(3) $$(A+B)_\lambda=A_\lambda+B_\lambda,(A+B)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}+B_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{3.90}$$

(4) $$(AB)_\lambda=A_\lambda B_\lambda,(AB)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}B_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{3.91}$$

定义 3.7.1 设 X 是环,$\beta\subseteq F(X)$,若 β 关于运算式(3.86)和式(3.87)构成一个环,则称 β 为 X 的一个模糊幂环,简称 F 幂环. 其零元用 Q 表示,$A\in\beta$,A 的负元用 $-A$ 表示.

我们约定空集也是幂环和 F 幂环.

定义 3.7.2 设 β 是环 X 的 F 幂环,$A\in\beta$,β 的高定义为 $\mathrm{high}A=\bigvee_{x\in X}A(x)$,若 $\bigvee_{x\in X}A(x)=\max_{x\in X}A(x)$,称 A 为 β 的达高元;若 β 的任意元均为达高元,则称 β 是 X 的一个达高 F 幂环;记 $\mathrm{high}\beta$ 为 β 的高,简记为 $h(\beta)$.

定理 3.7.1 设 β 是环 X 的 F 幂环,则 β 的任意元的高相等.

证明与定理 3.5.2 的证明类似,从略.

定理 3.7.2 设 β 是环 X 的 F 幂环,则$(Q,+)$,$(Q,\cdot)$是 X 的 F 子半群,从而$(Q,+,\cdot)$是 X 的 F 子半环.

证明 因为 $Q+Q=Q$,$QQ=Q$,所以$(Q,+)$,$(Q,\cdot)$是 X 的 F 子半群,$(Q,+,\cdot)$是 X 的 F 子半环.

定义 3.7.3 设 β 是环 X 的 F 幂环.

(1)若$(Q,+)$是 X 的 F 独异点,则称 β 是 X 的正规 F 幂环;

(2)若$(Q,+)$是X的F子群,则称β是X的一致F幂环.

定理 3.7.3　设β是环X的F幂环,$\forall\lambda\in[0,1]$,记

$$\beta_\lambda=\{A_\lambda \mid A\in\beta\} \tag{3.92}$$

则β_λ是X的一个幂环;若β是正规F幂环,则β_λ是正规幂环;若β是一致F幂环,则β_λ是一致幂环. Q_λ是β_λ的零元,$(-A)_\lambda$是A_λ的负元,即

$$(-A)_\lambda=-A_\lambda \tag{3.93}$$

定义 3.7.4　设H是环,H是X的子环,$Q\in F(X)$,Q满足$Q^2=Q$且$HQ\cup QH\subseteq H$.

(1)若$(Q,+)$是$(X,+)$的F子半群,则称Q是X的关于H的半理想,简称为H的半理想;

(2)若$(Q,+)$是$(X,+)$的F子群,则称Q是X的关于H的理想,简称为H的理想.

定理 3.7.4　设H是环X的子环.

(1) Q是H的F半理想的充分必要条件是Q_λ是H的半理想;

(2) Q是H的F理想的充分必要条件是Q_λ是H的理想.

设β是环X的高为h的达高F幂环,$\forall A\in\beta$,记

$$\overline{A}_h=\{a\in A_h \mid -a\in -A_h\} \tag{3.94}$$

$$\overline{X}=\cup\{\overline{A}_h \mid A\in\beta\} \tag{3.95}$$

定理 3.7.5(结构定理 1)　设β是环X的高为h的达高正规F幂环,则:

(1)$\overline{X}$是X的子环,Q是$\overline{X}$的F半理想;

(2)$\forall A\in\beta,a\in\overline{A}_h,A=a+Q=Q+a$,即

$$\beta=\overline{X}\Big|_Q=\{a+Q \mid a\in\overline{X}\} \tag{3.96}$$

证明　(1) $\overline{X}$是X的子环,由式(3.95)显然可得,因为$\forall\lambda\leqslant h$,若$a\in Q_\lambda$, $x\in\overline{X}$,则$\exists A_h,x\in\overline{A}_h\subseteq A_h\subseteq A_\lambda$,故$ax\in Q_\lambda A_\lambda=(QA)_\lambda=Q_\lambda$,同理$xa\in Q_\lambda$,又$(Q,+)$是$(X,+)$的$F$独异点,则$(Q_\lambda,+)$是$(\overline{X},+)$的子半群,于是$(Q_\lambda,+,\cdot)$是$\overline{X}$的半理想,所以$Q$是$\overline{X}$的$F$半理想.

(2)因为$(Q,+)$是$(X,+)$的F独异点,则$0\in Q_h$,则$\forall A\in\beta,\overline{A}_h\neq\varnothing$. $\forall a\in\overline{A}_h\subseteq\overline{X}$,则$\forall\lambda\leqslant h,a\in\overline{A}_\lambda$,故$a\in A_\lambda$, $-a\in -A_\lambda$, $a+Q_\lambda\subseteq A_\lambda+Q_\lambda=A_\lambda$, $\forall b\in A_\lambda$, $b=0+b=a+(-a)+b\in a+(-A_\lambda)+A_\lambda=a+Q_\lambda$,即$A_\lambda\subseteq a+Q_\lambda$,于是$A_\lambda=a+Q_\lambda$,从而$A=a+Q$,同理$A=Q+a$,所以$\beta=\{a+Q \mid a\in\overline{X}\}$.

设β是环X的高为h的达高F幂环,记

$$X^* = \bigcup_{A \in \beta} A_h \tag{3.97}$$

定理 3.7 6 设β是环 X 的高为 h 的达高一致 F 幂环,则$\forall A \in \beta, \overline{A}_h = A_h$, $\overline{X} = X^*$.

证明 因为$\beta_h = \{A_h \mid A \in \beta\}$是 X 的一致幂环,则$\overline{A}_h = A_h, \overline{X} = X^*$.

定理 3.7.7(结构定理2) 设β是环 X 的高为 h 的达高一致 F 幂环,则:

(1) X^*是 X 的子环,Q 是 $\overline{X}$ 的 F 理想;

(2) $\forall A \in \beta, a \in A_h$ 时,$A = a + Q = Q + a$,即

$$\beta = X^* / Q = \{a + Q \mid a \in X^*\}$$

定理 3.7.7 的结果直接由定理 3.7.5 和定理 3.7.6 可得.

定理 3.7.8 设 H 是环 X 的子环,$(Q, +)$是$(X, +)$的 F 子半群,且满足 $Q^2 = Q, HQ \cup QH \subseteq Q$,则$\forall a, b \in H$,

$$(a + Q)(b + Q) = ab + Q \tag{3.98}$$

证明 $\forall \lambda \in [0,1]$,$(Q_\lambda, +)$是$(X, +)$的子半群,$Q_\lambda^2 = Q_\lambda, H_\lambda Q_\lambda \cup Q_\lambda H_\lambda \subseteq Q_\lambda$,则$(a + Q_\lambda)(b + Q_\lambda) = ab + Q_\lambda$,从而$(a + \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda Q_\lambda)(b + \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda Q_\lambda) = ab + \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda Q_\lambda$,即$(a + Q)(b + Q) = ab + Q$.

推论 3.7.1 设 Q 是环 X 的正规(一致)幂环,则$\forall a, b \in X, (a + Q)(b + Q) = ab + Q$.

定理 3.7.9(构造定理) 设 H 是环 X 的子环,$Q \in F(X)$,若 Q 满足:$Q^2 = Q, HQ \cup QH \subseteq Q$,则:

(1) 若$(Q, +)$是$(X, +)$的 F 独异点,即 Q 是 X 的 F 子半环,则

$$H|_Q = \{a + Q \mid a \in H\} \tag{3.99}$$

是 X 的正规 F 幂环;

(2) 若$(Q, +)$是$(X, +)$的 F 子群,即 Q 是 X 的 F 子环,则

$$H / Q = \{a + Q \mid a \in H\} \tag{3.100}$$

是 X 的一致 F 幂环;

证明 只证(1),(2)的证明类似.

由$(Q, +)$是$(X, +)$的 F 独异点,则 $Q + Q = Q$,故$\forall a + Q, b + Q \in H|_Q$, $(a + Q) + (b + Q) = (a + b) + Q \in H|_Q$, $(a + Q)(b + Q) = ab + Q \in H|_Q$,令$f: H \to H|_Q$, $f(a) = a + Q$,则f是满射,而且$f(a + b) = (a + b) + Q = (a + Q) + (b + Q) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = ab + Q = (a + Q)(b + Q) = f(a)f(b)$,所以$f$是 H 到 $H|_Q$ 的满同态,从而 $H|_Q$ 环,即 $H|_Q$ 是 X 的正规 F 幂环.

定理 3.7.10 设β是环 X 的正规 F 幂环,则$\forall a, b \in \overline{X}, \lambda \in [0,1]$,有

(1) $a+Q=b+Q \Leftrightarrow a+Q_\lambda=b+Q_\lambda \Leftrightarrow a+\overline{Q}_\lambda=b+\overline{Q}_\lambda$;

(2) $Q+a=Q+b \Leftrightarrow Q_\lambda+a=Q_\lambda+b \Leftrightarrow \overline{Q}_\lambda+a=\overline{Q}_\lambda+b$.

证明与定理 3.5.9 的证明类似,从略.

定理 3.7.11　设 β 是环 X 的高为 h 的达高正规 F 幂环,则 β 同构于正规幂环 $\overline{X}|_{Q_\lambda}$ 和一致幂环 $\overline{X}/\overline{Q}_\lambda$ $(\lambda \leqslant h)$,即

$$\beta=\overline{X}|_Q \cong \overline{X}|_{Q_\lambda} \cong \overline{X}/\overline{Q}_\lambda \tag{3.101}$$

定理 3.7.12　设 β 是环 X 的一致 F 幂环,则 $\forall a,b \in X^*$,$\lambda \in [0,1]$,有:

(1) $a+Q=b+Q \Leftrightarrow a+Q_\lambda=b+Q_\lambda$;

(2) $Q+a=Q+b \Leftrightarrow Q_\lambda+a=Q_\lambda+b$.

定理 3.7.13(同构定理 2)　设 β 是环 X 的高为 h 的一致幂环,则 β 同构于一致幂环 X^*/Q_λ,即

$$\beta=X^*/Q \cong X^*/Q_\lambda \tag{3.102}$$

对于环 X 的正规(一致)F 幂环仍然可以用其零元进行分类,在同一类中利用两个理想链把它们加细为合成理想链,而且同类的两个合成理想链同构. 这些结果不再一一赘述.

第四章 粗糙集与模糊粗糙集

§4.1 粗糙集的基本理论

设 U 是论域. R 是 U 上的一个等价关系,即 $R \subseteq U \times U$. U/R 表示 R 的所有等价类构成的集合,即

$$U/R = \{[x]_R \mid \forall x \in U\}$$

其中 $[x]_R$ 表示包含 x 的 R 的等价类,

$$[x]_R = \{y \in U \mid (x,y) \in R\}.$$

定义 4.1.1 设 R 是论域 U 上的一个等价关系,称 (U,R) 为 Pawlak 近似空间;对于任意 $X \subseteq U$,称

$$\underline{R}(X) = \{x \in U \mid [x]_R \subseteq X\} = \cup \{[x]_R \mid [x]_R \subseteq X\} \tag{4.1}$$

为 X 关于近似空间 (U,R) 的下近似,称

$$\overline{R}(X) = \{x \in U \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset\} = \cup \{[x]_R \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset\} \tag{4.2}$$

为 X 关于近似空间 (U,R) 的上近似.

称 $R(X) = (\underline{R}(X), \overline{R}(X))$ 为 X 关于近似空间 (U,R) 的粗糙集(Rough 集).

分别称从 U 的幂集 $P(U)$ 到 $P(U)$ 的集合算子 $\underline{R}$ 与 $\overline{R}$ 为下近似算子与上近似算子.

定理 4.1.1 设 (U,R) 为 Pawlak 近似空间,由式(4.1)与式(4.2)所确定的下近似算子与上近似算子满足以下性质:

(L_1) $\underline{R}(X) = \backsim \overline{R}(\backsim X)$;

(U_1) $\overline{R}(X) = \backsim \underline{R}(\backsim X)$;

(L_2) $\underline{R}(U) = \overline{R}(U) = U$;

(U_2) $\underline{R}(\emptyset) = \overline{R}(\emptyset) = \emptyset$;

(L_3) $\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y)$;

(U_3) $\overline{R}(X \cup Y) = \overline{R}(X) \cup \overline{R}(Y)$;

(L_4) $X \subseteq Y \Rightarrow \underline{R}(X) \subseteq \underline{R}(Y)$;

$(U_4)\,X \subseteq Y \Rightarrow \overline{R}(X) \subseteq \overline{R}(Y)$;

$(L_5)\ \underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{R}(X) \cup \underline{R}(Y)$;

$(U_5)\,\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}(X) \cap \overline{R}(Y)$;

$(L_6)\ \underline{R}(X) \subseteq X$;

$(U_6)\,X \subseteq \overline{R}(X)$;

$(L_7)\,X \subseteq \underline{R}(\overline{R}(X))$;

$(U_7)\,\overline{R}(\underline{R}(X)) \subseteq X$;

$(L_8)\ \underline{R}(X) = \underline{R}(\underline{R}(X))$;

$(U_8)\,\overline{R}(X) = \overline{R}(\overline{R}(X))$;

$(L_9)\,\overline{R}(X) = \underline{R}(\overline{R}(X))$;

$(U_9)\ \underline{R}(X) = \overline{R}(\underline{R}(X))$.

其中 X,Y 为 U 的子集，$\backsim$ 表示集合的补运算.

证明　只证(L_1),(U_1),(L_3),(U_3),其他易证. 由于

$$\overline{R}(\backsim X) = \{x \mid [x]_R \cap (\backsim X) \neq \emptyset\} = \backsim \{x \mid [x]_R \cap (\backsim X) = \emptyset\}$$
$$= \backsim \{x \mid [x]_R \subseteq X\} = \backsim \underline{R}(X),$$

(U_1) 类似(L_1) 可证. 由于

$$\underline{R}(X \cap Y) = \{x \mid [x]_R \subseteq X \cap Y\} = \{x \mid [x]_R \subseteq X, [x]_R \subseteq Y\}$$
$$= \{x \mid [x]_R \subseteq X\} \cap \{x \mid [x]_R \subseteq Y\} = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y),$$

(U_3) 类似(L_3) 可证.

性质(L_i) 与性质$(U_i)$$(i = 1,2,\cdots,9)$ 常称为近似算子的对偶性质.

由于不同的集合可能会有相同的下近似或相同的上近似,因此我们可以进一步将 Rough 集进行分类.

定义 4.1.2　设(U,R) 为 Pawlak 近似空间,对于 U 的子集 X 与 Y,称 X 与 Y 下粗相等,若$\underline{R}(X) = \underline{R}(Y)$,记做 $X \eqsim Y$;称 X 与 Y 上粗相等,若$\overline{R}(X) = \overline{R}(Y)$,记做 $X \simeq Y$;称 X 与 Y 粗相等,若 X 与 Y 既下粗相等又上粗相等,记做 $X \approx Y$.

定理 4.1.2　设(U,R) 为 Pawlak 近似空间,$X,Y,X',Y' \in P(U)$,则有下列的性质成立:

(1) $X \eqsim Y \Leftrightarrow X \cap Y \eqsim X$ 且 $X \cap Y \eqsim Y$;

(2) $X \simeq Y \Leftrightarrow X \cup Y \simeq X$ 且 $X \cup Y \simeq Y$;

(3) 若 $X \simeq X'$ 且 $Y \simeq Y'$,则 $X \cup Y \simeq X' \cup Y'$;

(4) 若 $X \eqsim X'$ 且 $Y \eqsim Y'$,则 $X \cap Y \eqsim X' \cap Y'$;

(5) 若 $X \subseteq Y$ 且 $Y \simeq \emptyset$,则 $X \simeq \emptyset$;

(6) 若 $X \subseteq Y$ 且 $X \eqsim U$,则 $Y \eqsim U$;

(7) 若 $X \eqsim \varnothing$ 或 $Y \eqsim \varnothing$,则 $X \cap Y \eqsim \varnothing$;

(8) 若 $X \simeq U$ 或 $Y \simeq U$,则 $X \cup Y \simeq U$;

(9) 若 $X \simeq Y$,则 $X \cup \backsim Y \simeq U$;

(10) 若 $X \eqsim Y$,则 $X \cap \backsim Y \eqsim \varnothing$;

(11) $X \eqsim Y \Leftrightarrow \backsim X \simeq \backsim Y$;

(12) $X \simeq Y \Leftrightarrow \backsim X \eqsim \backsim Y$.

由定理 4.1.1 易证,从略.

定理 4.1.3 设(U,R)为 Pawlak 近似空间,则

(1) $\underline{R}(X)$ 是所有满足 $X \eqsim Y$ 的集合 $Y \subseteq U$ 的交集,即

$$\underline{R}(X) = \cap \{Y \subseteq U \mid Y \eqsim X\}.$$

(2) $\overline{R}(X)$ 是所有满足 $X \simeq Y$ 的集合 $Y \subseteq U$ 的并集,即

$$\overline{R}(X) = \cup \{Y \subseteq U \mid Y \simeq X\}.$$

证明 (1) 若 $Y \eqsim X$,则$\underline{R}(X) = \underline{R}(Y) \subseteq Y$,于是$\underline{R}(X) \subseteq \cap \{Y \subseteq U \mid Y \eqsim X\}$. 又因为$\underline{R}(X) = \underline{R}(\underline{R}(X))$,即$\underline{R}(X) \eqsim X$,于是$\underline{R}(X) \supseteq \cap \{Y \subseteq U \mid Y \eqsim X\}$. 即$\underline{R}(X) = \cap \{Y \subseteq U \mid Y \eqsim X\}$.

(2) 类似(1)可证.

定义 4.1.3 设(U,R)为 Pawlak 近似空间,对于 U 的子集 X 与 Y,

(1) 若$\underline{R}(X) \subseteq \underline{R}(Y)$,则称 X 下粗包含于 Y,记做 $X \underset{\sim}{\subset} Y$;

(2) 若$\overline{R}(X) \subseteq \overline{R}(Y)$,则称 X 上粗包含于 Y,记做 $X \tilde{\subset} Y$;

(3) 若 X 上粗包含于 Y,且 X 下粗包含于 Y,则称 X 粗包含于 Y,记做 $X \tilde{\underset{\sim}{\subset}} Y$.

定理 4.1.4 设(U,R)为 Pawlak 近似空间,“$X \underset{\sim}{\subset} Y$”,“$X \tilde{\subset} Y$”和“$X \tilde{\underset{\sim}{\subset}} Y$”都是 $P(U)$ 上的偏序关系,且满足以下性质:

(1) 若 $X \subseteq Y$,则 $X \underset{\sim}{\subset} Y, X \tilde{\subset} Y, X \tilde{\underset{\sim}{\subset}} Y$;

(2) 若 $X \underset{\sim}{\subset} Y, Y \underset{\sim}{\subset} X$,则 $X \eqsim Y$;

(3) 若 $X \tilde{\subset} Y, Y \tilde{\subset} X$,则 $X \simeq Y$;

(4) 若 $X \tilde{\underset{\sim}{\subset}} Y, Y \tilde{\underset{\sim}{\subset}} X$,则 $X \approx Y$;

(5) $X \underset{\sim}{\subset} Y \Leftrightarrow X \cap Y \eqsim X$;

(6) $X \tilde{\subset} Y \Leftrightarrow X \cup Y \simeq Y$;

(7) 若 $X \subseteq Y, X \eqsim X', Y \eqsim Y'$,则 $X' \underset{\sim}{\subset} Y'$;

(8) 若 $X \subseteq Y, X \simeq X', Y \simeq Y'$,则 $X' \tilde{\subset} Y'$;

(9) 若 $X \subseteq Y, X \approx X', Y \approx Y'$,则 $X' \underset{\sim}{\tilde{\subset}} Y'$;

(10) 若 $X' \underset{\sim}{\subset} X, Y' \underset{\sim}{\subset} Y$,则 $X' \cap Y' \underset{\sim}{\subset} X \cap Y$;

(11) 若 $X' \tilde{\subset} X, Y' \tilde{\subset} Y$,则 $X' \cup Y' \tilde{\subset} X \cup Y$;

(12) 若 $X \underset{\sim}{\subset} Y, X \underset{\sim}{\subset} Z$,则 $Z \underset{\sim}{\subset} Y$;

(13) 若 $X \tilde{\subset} Y, X \simeq Z$,则 $Z \tilde{\subset} Y$;

(14) 若 $X \underset{\sim}{\tilde{\subset}} Y, X \approx Z$,则 $Z \underset{\sim}{\tilde{\subset}} Y$.

由定理 4.1.1 易证,从略.

粗相等与粗包含实际上是将粗糙集进一步分类.下粗相等是将下近似相等的粗糙集作为一个类,而上粗相等是将上近似相等的粗糙集作为一个类,粗相等是将上近似、下近似都相等的粗糙集作为一个类,类与类之间的包含关系即是粗包含关系.

下面引入粗糙度的概念,用该概念来刻画粗糙集边界的模糊性.

定义 4.1.4　设 (U,R) 为 Pawlak 近似空间,X 关于近似空间 (U,R) 的上近似与下近似分别为 $\overline{R}(X)$ 与 $\underline{R}(X)$,则

$$\eta_R(X) = \frac{|\underline{R}(X)|}{|\overline{R}(X)|} \tag{4.3}$$

称为 X 关于近似空间 (U,R) 的精度,而

$$\rho_R(X) = 1 - \eta_R(X) \tag{4.4}$$

称为 X 关于近似空间 (U,R) 的粗糙度.

精度 $\eta_R(X)$ 反映了集合 X 在关系 R 下的知识确定程度.显然,对于任何一个 U 上的等价关系 R 和 $X \subseteq U$,均有 $0 \leqslant \eta_R(X) \leqslant 1$. $\eta_R(X) = 1 \Leftrightarrow \overline{R}(X) = X = \underline{R}(X)$,即 X 为 U 的确定集,$\eta_R(X) < 1 \Leftrightarrow \overline{R}(X) \neq \underline{R}(X)$,即 X 为 U 的不确定集.当然对于确定集 X 有 $\rho_R(X) = 0$,而对于不确定集 X 有 $\rho_R(X) > 0$.

粗糙集理论是基于对于经典信息系统的分类,并用分类集合近似表示集合 X. 包含于 X 的近似集合 $\underline{R}(X)$ 为下近似,包含 X 的近似集合 $\overline{R}(X)$ 为上近似.当两个集合相等时,它们的上近似、下近似分别相同;而两个集合的上近似、下近似相同时,未必这两个集合是相同的.但是上近似相同或下近似相同时,从某一个侧面反映了同样的知识,从而利用各种粗相等将具有相同知识的集合归类,简化了知识的表示.

§4.2　模糊粗糙集

在 Pawlak 粗糙集模型中,论域 U 上的任意一个经典集合 A 不一定能用知识

库(U,R)中的知识来精确地描述，这时就用A关于(U,R)的一对上近似、下近似来描述．但在实际生活中，人们涉及到的知识或概念往往是模糊的、不确定的，即A是U上的一个模糊集合，现在的问题是:A如何用(U,R)中的知识来精确地描述?模糊粗糙集模型就是针对这类问题提出来的．

定义 4.2.1 设(U,R)为 Pawlak 近似空间，即R为U上的等价关系，$[x]_R$表示包含x的等价类，对于U上的 fuzzy 集A，记

$$\underline{R}(A)(x)=\min\{A(y)\mid y\in[x]_R\} \tag{4.5}$$

$$\overline{R}(A)(x)=\max\{A(y)\mid y\in[x]_R\} \tag{4.6}$$

则$\underline{R}(A)$和$\overline{R}(A)$分别称为fuzzy集A关于近似空间(U,R)的下近似与上近似，而$\underline{R}:F(U)\to F(U)$和$\overline{R}:F(U)\to F(U)$分别称为下近似算子和上近似算子．称$(\underline{R}(A),\underline{R}(A))$是$A$的模糊粗糙集(**rough-fuzzy** 集)．
或者称$A^*=\{B\in F(U)\mid \underline{R}(B)=\underline{R}(A),\overline{R}(B)=\overline{R}(A)\}$为 rough-fuzzy 集．

我们知道，在 Pawlak 近似空间(U,R)中，属于同一等价类中的两个对象是不可分辨的，从上面的定义可以看出，$\underline{R}(A)$和$\overline{R}(A)$中的同一等价类中的隶属函数都是常数，这符合直观的意义．$\underline{R}(A)$可以理解为对象x肯定属于模糊集合A的隶属程度;$\overline{R}(A)$可以理解为对象x可能属于模糊集合A的隶属程度．

当A是经典集合时，$\underline{R}(A)(x)=1$当且仅当$[x]_R\subseteq A$，而$\overline{R}(A)(x)=1$当且仅当$[x]_R\cap A\neq\varnothing$，此时有

$$\underline{R}(A)=\{x\mid \underline{R}(A)(x)=1\},\overline{R}(A)=\{x\mid \overline{R}(A)(x)=1\}$$

即$\underline{R}(A)(x)$与$\overline{R}(A)(x)$分别为$\underline{R}(A)$与$\overline{R}(A)$的特征函数．

即当A是U上的经典集合时，$\underline{R}(A)$和$\overline{R}(A)$就退化为A在 Pawlak 意义下关于(U,R)的下近似和上近似，因此定义 4.2.1 是 Pawlak 意义下的推广形式．

对于U上的 fuzzy 集$A:U\to[0,1]$，可以定义A的λ水平集关于近似空间的(U,R)的下近似与上近似

$$\underline{R}(A_\lambda)=\{x\mid[x]_R\subseteq A_\lambda\},\underline{R}(A_{\underline{\lambda}})=\{x\mid[x]_R\subseteq A_{\underline{\lambda}}\} \tag{4.7}$$

$$\overline{R}(A_\lambda)=\{x\mid[x]_R\cap A_\lambda\neq\varnothing\},\overline{R}(A_{\underline{\lambda}})=\{x\mid[x]_R\cap A_{\underline{\lambda}}\neq\varnothing\} \tag{4.8}$$

且当$\alpha<\beta$时

$$\underline{R}(A_\beta)\subseteq\underline{R}(A_\alpha),\underline{R}(A_{\underline{\beta}})\subseteq\underline{R}(A_{\underline{\alpha}}),\overline{R}(A_\beta)\subseteq\overline{R}(A_{\underline{\alpha}}),\overline{R}(A_{\underline{\beta}})\subseteq\overline{R}(A_{\underline{\alpha}}).$$

于是$\{\underline{R}(A_\alpha)\mid\alpha\in[0,1]\}$与$\{\overline{R}(A_\alpha)\mid\alpha\in[0,1]\}$都是集合套，从而分别对应$U$上的两个 fuzzy 集合$\underline{R'}(A)$与$\overline{R'}(A)$，其隶属函数分别为

$$\underline{R'}(A)(x)=\vee\{\alpha\mid x\in\underline{R}(A_\alpha)\}=\vee\{\alpha\mid[x]_R\subseteq A_\alpha\} \tag{4.9}$$

$$\overline{R'}(A)(x)=\vee\{\alpha\mid x\in\overline{R}(A_\alpha)\}=\vee\{\alpha\mid[x]_R\cap A_\alpha\neq\varnothing\} \tag{4.10}$$

引理 4.2.1　设 R 是 U 上的等价关系，A 是 U 的任一模糊集，$\lambda \in [0,1]$，则 (1) $(\underline{R}(A))_\lambda = \underline{R}(A_\lambda)$；(2) $(\overline{R}(A))_\lambda = \overline{R}(A_\lambda)$.

证明　(1) $\forall x \in (\underline{R}(A))_\lambda \Leftrightarrow \underline{R}(A)(x) \geqslant \lambda \Leftrightarrow \min\{A(x') \mid x' \in [x]_R\} \geqslant \lambda \Leftrightarrow \forall x' \in [x]_R, A(x') \geqslant \lambda \Leftrightarrow [x]_R \subseteq A_\lambda \Leftrightarrow x \in \underline{R}(A_\lambda)$.

(2) $\forall x \in (\overline{R}(A))_\lambda \Leftrightarrow \overline{R}(A)(x) > \lambda \Leftrightarrow \max\{A(x') \mid x' \in [x]_R\} > \lambda \Leftrightarrow \exists x' \in [x]_R, A(x') > \lambda \Leftrightarrow [x]_R \cap A_\lambda \neq \varnothing \Leftrightarrow x \in \overline{R}(A_\lambda)$.

由模糊集的分解定理及引理 4.2.1 直接得下面的定理.

定理 4.2.1　设 (U,R) 为 Pawlak 近似空间，A 为 U 上的 fuzzy 集合，则

$$\underline{R}(A) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda\, \underline{R}(A_\lambda), \overline{R}(A) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda\, \overline{R}(A_\lambda).$$

定义 4.2.2　设 (U,R) 为 Pawlak 近似空间，A 为 U 上的 fuzzy 集合，分别称

$$\underline{R}(A) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda\, \underline{R}(A_\lambda) \tag{4.11}$$

$$\overline{R}(A) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda\, \overline{R}(A_\lambda) \tag{4.12}$$

为 A 的下近似集、上近似集，称 $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$ 是 A 的模糊粗糙集(**rough-fuzzy** 集).

定理 4.2.2　设 (U,R) 为 Pawlak 近似空间，近似空间 (U,R) 的 fuzzy 下近似算子与 fuzzy 上近似算子有以下性质：

(1) $\underline{R}(A) \subseteq A \subseteq \overline{R}(A)$；

(2) $\overline{R}(A \cup B) = \overline{R}(A) \cup \overline{R}(B)$；$\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}(A) \cap \underline{R}(B)$；

(3) 若 $A \subseteq B$，则 $\underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(B)$；$\overline{R}(A) \subseteq \overline{R}(B)$；

(4) $\overline{R}(A \cap B) \subseteq \overline{R}(A) \cap \overline{R}(B)$；$\underline{R}(A \cup B) \supseteq \underline{R}(A) \cup \underline{R}(B)$；

(5) $\underline{R}(A) = \underline{R}(\underline{R}(A)) = \overline{R}(\underline{R}(A))$；

(6) $\overline{R}(A) = \overline{R}(\overline{R}(A)) = \underline{R}(\overline{R}(A))$.

(7) $\underline{R}(A) = \sim \overline{R}(\sim A)$，$\overline{R}(A) = \sim \underline{R}(\sim A)$.

其中 A, B 为 U 上的 fuzzy 集合.

证明　对于任意 $x \in U$，由

$$\underline{R}(A)(x) = \min\{A(y) \mid y \in [x]_R\}$$

$$\overline{R}(A)(x) = \max\{A(y) \mid y \in [x]_R\}$$

及 $x \in [x]_R$ 得

$$\underline{R}(A)(x) \leqslant A(x) \leqslant \overline{R}(A)(x)$$

则(1)得证. 又因

$$\begin{aligned}\underline{R}(A \cap B)(x) &= \min\{A(y) \wedge B(y) \mid y \in [x]_R\} \\ &= \min\{A(y) \mid y \in [x]_R\} \wedge \min\{B(y) \mid y \in [x]_R\}\end{aligned}$$

$$= \underline{R}(A)(x) \wedge \underline{R}(B)(x)$$

因此

$$\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}(A) \cap \underline{R}(B).$$

其他情形类似可证.

定义 4.2.3 设(U,R)为 Pawlak 近似空间,对于U上的 fuzzy 子集X与Y,若$\underline{R}(X) = \underline{R}(Y)$,称$X$与$Y$下粗相等,记做$X \eqsim Y$;若$\overline{R}(X) = \overline{R}(Y)$,称$X$与$Y$上粗相等,记做$X \simeq Y$;称$X$与$Y$粗相等,若$X$与$Y$既下粗相等又上粗相等,记做$X \approx Y$.

易知,"$\eqsim$"、"$\simeq$"、"$\approx$"都是U的全体 fuzzy 集$F(U)$上的等价关系.

定理 4.2.3 设(U,R)为 Pawlak 近似空间,$X,Y,X',Y' \in F(U)$,则有下列性质成立:

(1)$X \eqsim Y \Leftrightarrow X \cap Y \eqsim X$且$X \cap Y \eqsim Y$;

(2)$X \simeq Y \Leftrightarrow X \cup Y \simeq X$且$X \cup Y \simeq Y$;

(3)若$X \simeq X'$且$Y \simeq Y'$,则$X \cup Y \simeq X' \cup Y'$;

(4)若$X \eqsim X'$且$Y \eqsim Y'$,则$X \cap Y \eqsim X' \cap Y'$;

(5)若$X \subseteq Y$且$Y \simeq \varnothing$,则$X \simeq \varnothing$;

(6)若$X \subseteq Y$且$X \eqsim U$,则$Y \eqsim U$;

(7)若$X \eqsim \varnothing$或$Y \eqsim \varnothing$,则$X \cap Y \eqsim \varnothing$;

(8)若$X \simeq U$或$Y \simeq U$,则$X \cup Y \simeq U$;

(9)$X \simeq \varnothing \Leftrightarrow X = \varnothing$;

(10)$X \eqsim U \Leftrightarrow X = U$.

证明 由定义直接可证.

定理 4.2.4 设(U,R)为 Pawlak 近似空间,A为U上的 fuzzy 集合,则

(1) $\underline{R}(A) = \cap\{B \in F(U) \mid B \eqsim A\}$;

(2) $\overline{R}(A) = \cup\{B \in F(U) \mid B \simeq A\}$.

由定理 4.2.2 即证.

由定义 4.2.1 给出的下近似和上近似是一对模糊集合,如果我们将模糊集合A用知识库(U,R)中的经典集合来描述,则可以通过模糊集的截集来过渡.

定义 4.2.4 设(U,R)为 Pawlak 近似空间,A为U上的 fuzzy 集合,则A关于近似空间(U,R)依参数$0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$的下近似$(\underline{R}A)_\alpha$和上近似$(\overline{R}A)_\beta$分别定义为

$$(\underline{R}A)_\alpha = \{x \in U \mid (\underline{R}A)(x) \geqslant \alpha\} \tag{4.13}$$

$$(\overline{R}A)_\beta = \{x \in U \mid (\overline{R}A)(x) \geqslant \beta\} \tag{4.14}$$

这里,$(\underline{R}A)_\alpha$可以理解为U中肯定属于模糊集A的隶属程度不小于α的那

些对象的全体；$(\overline{R}A)_\beta$ 可以理解为 U 中可能属于模糊集 A 的隶属程度不小于 β 的那些对象的全体.

显然

$$(\underline{R}A)_\alpha = \cup\{[x] \mid (\underline{R}A)(x) \geqslant \alpha\}$$
$$(\overline{R}A)_\beta = \cup\{[x] \mid (\overline{R}A)(x) \geqslant \beta\}$$

这样，$(\underline{R}A)_\alpha$ 又可以解释为 U 中肯定属于模糊集 A 的隶属程度不小于 α 的那些对象所在的等价类的并集；$(\overline{R}A)_\beta$ 可以解释为 U 中可能属于模糊集 A 的隶属程度不小于 β 那些对象所在的等价类的并集.

注　当 A 是经典集合时，对于任意 $\alpha,\beta \in (0,1]$，$(\underline{R}A)_\alpha$ 和 $(\overline{R}A)_\beta$ 分别退化为在 Pawlak 意义下关于近似空间 (U,R) 的上近似、下近似定义：

$$\underline{R}A = \{x \in U \mid [x]_R \subseteq A\}, \overline{R}A = \{x \in U \mid [x]_R \cap A \neq \varnothing\}.$$

定理 4.2.5　设 (U,R) 为 Pawlak 近似空间，A 为 U 上的 fuzzy 集合，则对于 $0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$ 有

(1) $(\overline{R}(A \cup B))_\beta = (\overline{R}A)_\beta \cup (\overline{R}B)_\beta$，$(\underline{R}(A \cap B))_\alpha = (\underline{R}A)_\alpha \cap (\underline{R}B)_\alpha$；

(2) 若 $A \subseteq B$，则 $(\underline{R}A)_\alpha \subseteq (\underline{R}B)_\alpha$，$(\overline{R}A)_\beta \subseteq (\overline{R}B)_\beta$；

(3) $(\underline{R}(A \cup B))_\alpha \supseteq (\underline{R}A)_\alpha \cup (\underline{R}B)_\alpha$，$(\overline{R}(A \cap B))_\beta \subseteq (\overline{R}A)_\beta \cap (\overline{R}B)_\beta$；

(4) $(\underline{R}A)_\alpha \subseteq (\overline{R}A)_\beta$；

(5) $(\overline{R}(\backsim A))_\beta = \backsim(\underline{R}A)_{1-\beta}$，$(\underline{R}(\backsim A))_\alpha = \backsim(\overline{R}A)_{1-\alpha}$.

证明　由定义和定理 4.2.2 直接证得.

定义 4.2.5　设 (U,R) 为 Pawlak 近似空间，A 为 U 上的 fuzzy 集合，定义 A 关于 (U,R) 的粗糙度 ρ_A 为：$\rho_A = 1 - \dfrac{|\underline{R}A|}{|\overline{R}A|}$，当 $|\overline{R}A| = 0$ 时，约定 $\rho_A = 0$；称 $\eta_A = \dfrac{|\underline{R}A|}{|\overline{R}A|}$ 为 A 关于 (U,R) 的近似精度.

显然，$0 \leqslant \rho_A \leqslant 1, 0 \leqslant \eta_A \leqslant 1$. 若 A 是可以定义的，则有 $\rho_A = 0, \eta_A = 1$.

定义 4.2.6　设 (U,R) 为 Pawlak 近似空间，A 为 U 上的 fuzzy 集合，对于 $0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$，定义 A 在近似空间 (U,R) 上关于参数 α,β 的粗糙度 $\rho_A^{\alpha,\beta}$ 为

$$\rho_A^{\alpha,\beta} = 1 - \frac{|(\underline{R}A)_\alpha|}{|(\overline{R}A)_\beta|}$$

约定：当 $(\overline{R}A)_\beta = \varnothing$ 时，$\rho_A^{\alpha,\beta} = 0$.

由定义可以直接得到下列性质：

定理 4.2.6　(1) $0 \leqslant \rho_A^{\alpha,\beta} \leqslant 1$.

(2) 若 β 固定，则 $|(\underline{R}A)_\alpha|$ 随 α 增加而减少，从而 $\rho_A^{\alpha,\beta}$ 随 α 增加而增加；若 α

固定,则 $|(\overline{R}A)_\beta|$ 随 β 增加而减少,从而 $\rho_A^{\alpha,\beta}$ 随 β 增加而减少.

定理 4.2.7 (1) 在 (U,R) 中,若对于任意的等价类 $[x]$,都存在 $y \in [x]$,使得 $A(y) < \alpha$,则 $(\underline{R}A)_\alpha = \varnothing$,从而 $\rho_A^{\alpha,\beta} = 1$;

(2) 若模糊集 A 在 (U,R) 的每个等价类中的隶属函数都是常数,则对于任意 $\alpha \in (0,1]$,有 $(\underline{R}A)_\alpha = (\overline{R}A)_\alpha$,从而 $\rho_A^{\alpha,\alpha} = 0$.

证明 由定义直接可得.

定理 4.2.8 若模糊集 A 的隶属函数恒为常数,即存在 $\delta > 0$,使对于任意的 $x \in U$ 有 $A(x) = \delta$,则

(1) 当 $0 < \beta < \delta < \alpha \leqslant 1$ 时,有 $\rho_A^{\alpha,\beta} = 1$;

(2) 对于 $0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$ 时,δ 的其他情形,有 $\rho_A^{\alpha,\beta} = 0$.

证明 (1) 当 $0 < \beta < \delta < \alpha \leqslant 1$ 时,显然 $(\underline{R}A)_\alpha = \varnothing$,$(\overline{R}A)_\beta = U$,从而 $\rho_A^{\alpha,\beta} = 1$;

(2) 此时有两种情形:情形 1. $\delta < \beta \leqslant \alpha$,这时 $(\underline{R}A)_\alpha = (\overline{R}A)_\beta = \varnothing$,从而根据约定有 $\rho_A^{\alpha,\beta} = 0$;情形 2. $\beta \leqslant \alpha \leqslant \delta$,这时 $(\underline{R}A)_\alpha = (\overline{R}A)_\beta = U$,从而根据定义有 $\rho_A^{\alpha,\beta} = 0$.

定理 4.2.9 设 (U,R) 为 Pawlak 近似空间,A,B 为 U 上的 fuzzy 集合,且 $A \subseteq B$,$0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$,则

(1) 如果 $(\overline{R}A)_\beta = (\overline{R}B)_\beta$,那么 $\rho_B^{\alpha,\beta} \leqslant \rho_A^{\alpha,\beta}$;

(2) 如果 $(\underline{R}A)_\alpha = (\underline{R}B)_\alpha$,那么 $\rho_A^{\alpha,\beta} \leqslant \rho_B^{\alpha,\beta}$;

(3) 如果存在 $r > 0$,使对于任意 $x \in U$ 有 $A(x) \geqslant r$,那么当 $\beta \leqslant r$ 时,有 $\rho_B^{\alpha,\beta} \leqslant \rho_A^{\alpha,\beta}$;

(4) 如果存在 $r > 0$,使对于任意 $x \in U$ 有 $A(x) \geqslant r$,那么当 $\alpha \leqslant r$ 时,有 $\rho_B^{\alpha,\beta} = \rho_A^{\alpha,\beta} = 0$.

证明 由 $A \subseteq B$,可得 $(\underline{R}A)_\alpha \subseteq (\underline{R}B)_\alpha$,$(\overline{R}A)_\beta \subseteq (\overline{R}B)_\beta$,从而(1)和(2)成立;

(3) 由 $\beta \leqslant r$ 可得 $(\overline{R}A)_\beta = (\overline{R}B)_\beta = U$,从而由(1)知 $\rho_B^{\alpha,\beta} \leqslant \rho_A^{\alpha,\beta}$;

(4) 由 $\alpha \leqslant r$ 可得 $(\underline{R}A)_\alpha = (\underline{R}B)_\alpha = U$,且 $(\overline{R}A)_\beta = (\overline{R}B)_\beta = U$,从而 $\rho_B^{\alpha,\beta} = \rho_A^{\alpha,\beta} = 0$.

上述定理说明,由 $A \subseteq B$ 不能简单地判别 $\rho_A^{\alpha,\beta} \leqslant \rho_B^{\alpha,\beta}$ 或 $\rho_B^{\alpha,\beta} \leqslant \rho_A^{\alpha,\beta}$.

定理 4.2.10 设 U 是有限论域,(U,R) 为 Pawlak 近似空间,A,B 为 U 上的 fuzzy 集合,$0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$,则有

$$\rho_{A\cup B}^{\alpha,\beta}|(\overline{R}A)_\beta \cup (\overline{R}B)_\beta| \leqslant \rho_A^{\alpha,\beta}|(\overline{R}A)_\beta| + \rho_B^{\alpha,\beta}|(\overline{R}B)_\beta| - \rho_{A\cap B}^{\alpha,\beta}|(\overline{R}A)_\beta \cap (\overline{R}B)_\beta| \tag{4.15}$$

证明　由定理 4.2.5 可得

$$\rho_{A\cup B}^{\alpha,\beta}=1-\frac{|(\underline{R}(A\cup B))_{\alpha}|}{(\overline{R}(A\cup B))_{\beta}}$$

$$=1-\frac{|(\underline{R}(A\cup B))_{\alpha}|}{|(\overline{R}A)_{\beta}\cup(\overline{R}B)_{\beta}|}\leqslant 1-\frac{|(\underline{R}A)_{\alpha}\cup(\underline{R}B)_{\alpha}|}{|(\overline{R}A)_{\beta}\cup(\overline{R}B)_{\beta}|} \qquad ①$$

$$\rho_{A\cap B}^{\alpha,\beta}=1-\frac{|(\underline{R}(A\cap B))_{\alpha}|}{|(\overline{R}(A\cap B))_{\beta}|}$$

$$=1-\left|\frac{|(\underline{R}A)_{\alpha}\cap(\underline{R}B)_{\alpha}|}{|(\overline{R}(A\cap B))_{\beta}|}\leqslant 1-\frac{|(\underline{R}A)_{\alpha}\cap(\underline{R}B)_{\alpha}|}{|(\overline{R}A)_{\beta}\cap(\overline{R}B)_{\beta}|} \qquad ②\right.$$

由于对任意的有限集 A,B 有:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B| \qquad ③$$

则由式①、式②、式③有

$$\rho_{A\cup B}^{\alpha,\beta}|(\overline{R}A)_{\beta}\cup(\overline{R}B)_{\beta}|\leqslant|(\overline{R}A)_{\beta}\cup(\overline{R}B)_{\beta}|-|(\underline{R}A)_{\alpha}\cup(\underline{R}B)_{\alpha}|$$

$$=|(\overline{R}A)_{\beta}|+|(\overline{R}B)_{\beta}|-|(\overline{R}A)_{\beta}\cap(\overline{R}B)_{\beta}|-|(\underline{R}A)_{\alpha}|-|(\underline{R}B)_{\alpha}|$$

$$+|(\underline{R}A)_{\alpha}\cap(\underline{R}B)_{\alpha}|$$

$$\leqslant|(\overline{R}A)_{\beta}|+|(\overline{R}B)_{\beta}|-|(\underline{R}A)_{\alpha}|-|(\underline{R}B)_{\alpha}|$$

$$-\rho_{A\cap B}^{\alpha,\beta}|(\overline{R}A)_{\beta}\cap(\overline{R}B)_{\beta}|$$

利用 $\rho_A^{\alpha,\beta}$ 和 $\rho_B^{\alpha,\beta}$ 的性质可知定理成立.

设 S 是 U 上的另一等价关系,记 ρ_A 和 φ_A 分别是 A 关于 (U,R) 和 (U,S) 的粗糙度,$\rho_A^{\alpha,\beta}$ 和 $\varphi_A^{\alpha,\beta}$ 分别是 A 在 (U,R) 和 (U,S) 中关于 α,β 的粗糙度,η_A 和 ξ_A 分别是 A 关于 (U,R) 和 (U,S) 的近似精度.

定理 4.2.11　设 (U,R) 为 Pawlak 近似空间,A 为 U 上的 fuzzy 集合,$S\subseteq R$,$\forall 0<\beta\leqslant\alpha\leqslant 1$,则

(1) $\underline{R}A\subseteq\underline{S}A,\overline{S}A\subseteq\overline{R}A$;

(2) $(\underline{R}A)_{\alpha}\subseteq(\underline{S}A)_{\alpha},(\overline{S}A)_{\beta}\subseteq(\overline{R}A)_{\beta}$.

证明　由于 $S\subseteq R$ 当且仅当 $\forall x\in U$,有 $[x]_S\subseteq[x]_R$,于是

(1) $\forall x\in U$,有

$$(\underline{R}A)(x)=\inf\{A(y)\mid y\in[x]_R\}\leqslant\inf\{A(y)\mid y\in[x]_S\}=(\underline{S}A)(x),$$

从而 $\underline{R}A\subseteq\underline{S}A$. 同理可得 $\overline{S}A\subseteq\overline{R}A$.

(2) 若 $x\in(\underline{R}A)_{\alpha}$,则 $\underline{R}(A)(x)\geqslant\alpha$,从而由(1)得

$$\underline{S}A(x)\geqslant\underline{R}A(x)\geqslant\alpha,$$

故 $x\in(\underline{S}A)_{\alpha}$,于是 $(\underline{R}A)_{\alpha}\subseteq(\underline{S}A)_{\alpha}$. 同理可得 $(\overline{S}A)_{\beta}\subseteq(\overline{R}A)_{\beta}$.

定理 4.2.12　设 (U,R) 为 Pawlak 近似空间,A 为 U 上的 fuzzy 集合,$S\subseteq R$,

则

(1) $\varphi_A^{\alpha,\beta} \leqslant \rho_A^{\alpha,\beta}$;

(2) $\varphi_A \leqslant \rho_A$.

证明 由定义和定理 4.2.2 即得.

注 定理 4.2.11 说明,模糊划分越细,所得近似的粗糙度就越小.

§4.3 模糊关系下的模糊粗糙集

定义 4.3.1 设(U,R)为模糊近似空间,即R为U上的模糊等价关系,对于U上的 fuzzy 集A,记

$$(\underline{R}(A))(x) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda \mid \forall y \in [x]_{R_\lambda}, R(x,y) \wedge \lambda \leqslant A(y)\} \quad (4.16)$$

$$(\overline{R}(A))(x) = \bigvee_{y \in U} R(x,y) \wedge A(y) \quad (4.17)$$

则$\underline{R}(A)$(简记为$\underline{R}A$)和$\overline{R}(A)$(简记为$\overline{R}A$)分别称为 fuzzy 集A关于模糊近似空间(U,R)的下近似与上近似,而$\underline{R}: F(U) \to F(U)$和$\overline{R}: F(U) \to F(U)$分别称为模糊下近似算子和模糊上近似算子. 称$(\underline{R}A, \overline{R}A)$是$A$的模糊近似空间中的模糊粗糙集(rough-fuzzy 集).

我们指出,在定义 4.3.1 中:

(1) 若(U,R)是近似空间,$A \in P(U)$,则$\underline{R}A = \{x \in U \mid [x]_R \subseteq A\}$,$\overline{R}A = \{x \in U \mid [x]_R \cap A \neq \varnothing\}$.

(2) 若(U,R)是近似空间,$A \in F(U)$,则$\underline{R}A = \inf\{A(y) \mid y \in [x]_R\}$,$\overline{R}A = \sup\{A(y) \mid y \in [x]_R\}$.

所以,定义 4.3.1 是 Pawlak 定义和 Banerjee M. 定义的推广.

定义 4.3.2 设(U,R)为模糊近似空间,对于U上的 fuzzy 集A,定义$\underline{R}A$,$\overline{R}A$的λ-截集和强λ-截集分别如下

$$(\underline{R}A)_\lambda = \{x \in U \mid [x]_{R_\lambda} \subseteq A_\lambda\} \quad (4.18)$$

$$(\overline{R}A)_\lambda = \{x \in U \mid [x]_{R_\lambda} \cap A_\lambda \neq \varnothing\} \quad (4.19)$$

$$(\underline{R}A)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \{x \in U \mid [x]_{R_{\underset{\cdot}{\lambda}}} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\} \quad (4.20)$$

$$(\overline{R}A)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \{x \in U \mid [x]_{R_{\underset{\cdot}{\lambda}}} \cap A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \neq \varnothing\} \quad (4.21)$$

即$(\underline{R}A)_\lambda = \underline{R_\lambda}(A_\lambda)$,$(\overline{R}A)_\lambda = \overline{R_\lambda}(A_\lambda)$,$(\underline{R}A)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \underline{R_{\underset{\cdot}{\lambda}}}(A_{\underset{\cdot}{\lambda}})$,$(\overline{R}A)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \overline{R_{\underset{\cdot}{\lambda}}}(A_{\underset{\cdot}{\lambda}})$.

注 这里$[x]_{R_\lambda}$,$[x]_{R_{\underset{\cdot}{\lambda}}}$分别是按照等价关系$R_\lambda$,$R_{\underset{\cdot}{\lambda}}$确定的$x$所在的等价类

引理 4.3.1 设(U,R)为模糊近似空间,$A,B \in F(U)$,$\forall \lambda \in [0,1]$,则有

(1) $(\overline{R}(A\cup B))_\lambda = (\overline{R}A)_\lambda \cup (\overline{R}B)_\lambda$；$(\overline{R}(A\cup B))_{\dot\lambda} = (\overline{R}A)_{\dot\lambda} \cup (\overline{R}B)_{\dot\lambda}$；

(2) $(\underline{R}(A\cap B))_\lambda = (\underline{R}A)_\lambda \cap (\underline{R}B)_\lambda$；$(\underline{R}(A\cap B))_{\dot\lambda} = (\underline{R}A)_{\dot\lambda} \cap (\underline{R}B)_{\dot\lambda}$；

(3) 若 $A\subseteq B$，则 $(\underline{R}A)_\lambda \subseteq (\underline{R}B)_\lambda$；$(\overline{R}A)_\lambda \subseteq (\overline{R}B)_\lambda$；

$$(\underline{R}A)_{\dot\lambda} \subseteq (\underline{R}B)_{\dot\lambda};\ (\overline{R}A)_{\dot\lambda} \subseteq (\overline{R}B)_{\dot\lambda};$$

(4) $(\underline{R}(A\cup B))_\lambda \supseteq (\underline{R}A)_\lambda \cup (\underline{R}B)_\lambda$；$(\underline{R}(A\cup B))_{\dot\lambda} \supseteq (\underline{R}A)_{\dot\lambda} \cup (\underline{R}B)_{\dot\lambda}$；

(5) $(\overline{R}(A\cap B))_\lambda \subseteq (\overline{R}A)_\lambda \cap (\overline{R}B)_\lambda$；$(\overline{R}(A\cap B))_{\dot\lambda} \subseteq (\overline{R}A)_{\dot\lambda} \cap (\overline{R}B)_{\dot\lambda}$；

(6) $(\overline{R}(\backsim A))_\lambda = \backsim \underline{R_\lambda}(A_{1-\dot\lambda})$；$(\underline{R}(\backsim A))_\lambda = \backsim \overline{R_\lambda}(A_{1-\dot\lambda})$.

证明　只证截集的情况，强截集的情况同理可证．

(1) $(\overline{R}(A\cup B))_\lambda = \overline{R_\lambda}(A\cup B)_\lambda = \overline{R_\lambda}(A_\lambda\cup B_\lambda) = \overline{R_\lambda}A_\lambda \cup \overline{R_\lambda}B_\lambda$

$$= (\overline{R}A)_\lambda \cup (\overline{R}B)_\lambda;$$

(2) $(\underline{R}(A\cap B))_\lambda = \underline{R_\lambda}(A\cap B)_\lambda = \underline{R_\lambda}(A_\lambda\cap B_\lambda) = \underline{R_\lambda}(A_\lambda) \cap \underline{R_\lambda}(B_\lambda)$

$$= (\underline{R}A)_\lambda \cap (\underline{R}B)_\lambda;$$

(3) 若 $A\subseteq B$，则 $A_\lambda \subseteq B_\lambda$，

$$(\underline{R}A)_\lambda = \underline{R_\lambda}(A_\lambda) \subseteq \underline{R_\lambda}(B_\lambda) = (\underline{R}B)_\lambda;$$

$$(\overline{R}A)_\lambda = \overline{R_\lambda}(A_\lambda) \subseteq \overline{R_\lambda}(B_\lambda) = (\overline{R}B)_\lambda;$$

(4) 因为 $A\subseteq A\cup B$ 且 $B\subseteq A\cup B$，由(3)得 $(\underline{R}A)_\lambda \subseteq (\underline{R}(A\cup B))_\lambda$ 且 $(\underline{R}B)_\lambda \subseteq (\underline{R}(A\cup B))_\lambda$，故 $(\underline{R}(A\cup B))_\lambda \supseteq (\underline{R}A)_\lambda \cup (\underline{R}B)_\lambda$；

(5) 因为 $A\cap B\subseteq A$ 且 $A\cap B\subseteq B$，由(3)得 $(\overline{R}(A\cap B))_\lambda \subseteq (\overline{R}A)_\lambda$ 且 $(\overline{R}(A\cap B))_\lambda \subseteq (\overline{R}B)_\lambda$，故 $(\overline{R}(A\cap B))_\lambda \subseteq (\overline{R}A)_\lambda \cap (\overline{R}B)_\lambda$；

(6) $(\overline{R}(\backsim A))_\lambda = \overline{R_\lambda}((\backsim A)_\lambda) = \overline{R_\lambda}(\backsim A_{1-\dot\lambda}) = \backsim \underline{R_\lambda}(A_{1-\dot\lambda})$；
$(\underline{R}(\backsim A))_\lambda = \underline{R_\lambda}(\backsim A)_\lambda = \underline{R_\lambda}(\backsim A_{1-\dot\lambda}) = \backsim \overline{R_\lambda}(A_{1-\dot\lambda})$.

定理 4.3.1　设 (U,R) 是模糊近似空间，$A\in F(U)$，$\forall x\in U$，则

(1) $\left(\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]} \lambda(\underline{R}A)_\lambda\right)(x) = \bigvee\limits_{\lambda\in[0,1]}\{\lambda \mid \forall y\in[x]_{R_\lambda}, R(x,y)\wedge\lambda \leqslant A(y)\}$,

(2) $\left(\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]} \lambda(\underline{R}A)_{\dot\lambda}\right)(x) \subseteq \bigvee\limits_{\lambda\in[0,1]}\{\lambda \mid \forall y\in[x]_{R_\lambda}, R(x,y)\wedge\lambda \leqslant A(y)\}$,

(3) $\left(\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]} \lambda(\overline{R}A)_\lambda\right)(x) \subseteq \bigvee\limits_{y\in U} R(x,y)\wedge A(y)$,

(4) $\left(\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]} \lambda(\overline{R}A)_{\dot\lambda}\right)(x) = \bigvee\limits_{y\in U} R(x,y)\wedge A(y)$.

特别地，当 U 为有限论域时，(2) 和(3) 均为等式．

证明

(1) $\left(\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]} \lambda(\underline{R}A)_\lambda\right)(x)$

$$
\begin{aligned}
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \lambda \wedge (\underline{R}A)_{\lambda}(x) = \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid x \in (\underline{R}A)_{\lambda}\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid [x]_{R_{\lambda}} \subseteq A_{\lambda}\} = \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid \forall y \in [x]_{R_{\lambda}},\text{则 } y \in A_{\lambda}\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid \forall y \in U,\text{若 } R(x,y) \geqslant \lambda,\text{则 } A(y) \geqslant \lambda\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid \forall y \in [x]_{R_{\lambda}}, R(x,y) \wedge \lambda \leqslant A(y)\}.
\end{aligned}
$$

(2) $\left(\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda(\underline{R}A)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\right)(x)$

$$
\begin{aligned}
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \lambda \wedge (\underline{R}A)_{\underset{\cdot}{\lambda}}(x) = \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid x \in (\underline{R}A)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid [x]_{R_{\underset{\cdot}{\lambda}}} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid \forall y \in [x]_{R_{\underset{\cdot}{\lambda}}},\text{则 } y \in A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid \forall y \in U,\text{若 } R(x,y) > \lambda,\text{则 } A(y) > \lambda\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid \forall y \in [x]_{R_{\underset{\cdot}{\lambda}}}, R(x,y) \wedge \lambda < A(y)\} \\
&\quad \leqslant \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid \forall y \in [x]_{R_{\underset{\cdot}{\lambda}}}, R(x,y) \wedge \lambda \leqslant A(y)\} \\
&\quad \leqslant \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid \forall y \in [x]_{R_{\lambda}}, R(x,y) \wedge \lambda \leqslant A(y)\}.
\end{aligned}
$$

(3) $\left(\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda(\overline{R}A)_{\lambda}\right)(x)$

$$
\begin{aligned}
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \lambda \wedge (\overline{R}A)_{\lambda}(x) = \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid x \in (\overline{R}A)_{\lambda}\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid [x]_{R_{\lambda}} \cap A_{\lambda} \neq \varnothing\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid \exists y \in U, y \in [x]_{R_{\lambda}} \text{ 且 } y \in A_{\lambda}\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid \exists y \in U, R(x,y) \geqslant \lambda \text{ 且 } A(y) \geqslant \lambda\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid \exists y \in U, R(x,y) \wedge A(y) \geqslant \lambda\} \\
&\quad \leqslant \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid \bigvee_{y\in U} R(x,y) \wedge A(y) \geqslant \lambda\} \\
&= \bigvee_{y\in U} R(x,y) \wedge A(y).
\end{aligned}
$$

(4) $\left(\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda(\overline{R}A)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\right)(x) = \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \lambda \wedge (\overline{R}A)_{\underset{\cdot}{\lambda}}(x)$

$$
\begin{aligned}
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid x \in (\overline{R}A)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid [x]_{R_{\underset{\cdot}{\lambda}}} \cap A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \neq \varnothing\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid \exists y \in U, y \in [x]_{R_{\underset{\cdot}{\lambda}}} \text{ 且 } y \in A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid \exists y \in U, R(x,y) > \lambda \text{ 且 } A(y) > \lambda\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid \exists y \in U, R(x,y) \wedge A(y) > \lambda\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid \bigvee_{y\in U} R(x,y) \wedge A(y) > \lambda\}
\end{aligned}
$$

$$= \bigvee_{y \in U} R(x,y) \wedge A(y).$$

由定理 4.3.1 我们很容易给出与定义 4.3.1 等价的模糊近似空间中的模糊粗糙集的截集形式定义.

定义 4.3.3　设(U,R)为模糊近似空间,对于 U 上的 fuzzy 集 A,记

$$\underline{R}A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(\underline{R}A)_\lambda \tag{4.22}$$

$$\overline{R}A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(\overline{R}A)_\lambda \tag{4.23}$$

则$\underline{R}A$ 和$\overline{R}A$ 分别称为 fuzzy 集 A 关于模糊近似空间(U,R)的下近似与上近似.

另外有

$$\underline{R}A \geqslant \bigcup_{\lambda \in [0,1]} (\underline{R}A)_\lambda$$

$$\overline{R}A \geqslant \bigcup_{\lambda \in [0,1]} (\overline{R}A)_\lambda$$

下面我们讨论模糊近似空间上的模糊粗糙集的性质.

定理 4.3.2　设(U,R)为模糊近似空间,$A,B \in F(U)$,则有

(1) $\underline{R}A \subseteq A \subseteq \overline{R}A$;

(2) $\overline{R}(A \cup B) = \overline{R}A \cup \overline{R}B$;$\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}A \cap \underline{R}B$;

(3) 若 $A \subseteq B$,则$\underline{R}A \subseteq \underline{R}B$;$\overline{R}A \subseteq \overline{R}B$;

(4) $\underline{R}A = \underline{R}(\underline{R}A) = \overline{R}(\underline{R}A)$;$\overline{R}A = \overline{R}(\overline{R}A) = \underline{R}(\overline{R}A)$;

(5) $\overline{R}(A \cap B) \subseteq \overline{R}A \cap \overline{R}B$;$\underline{R}(A \cup B) \supseteq \underline{R}A \cup \underline{R}B$;

(6) $\underline{R}A = A \Leftrightarrow \overline{R}A = A$;

(7) $\underline{R}U = U$;$\overline{R}\emptyset = \emptyset$.

证明　只证前半部分,后半部分同理可证. $\forall x \in U$,

(1) 因为$(\underline{R}A)_\lambda = \underline{R_\lambda}A_\lambda \subseteq A_\lambda \subseteq \overline{R_\lambda A_\lambda} = (\overline{R}A)_\lambda$,则

$$\underline{R}A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(\underline{R}A)_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_\lambda = A \subseteq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(\overline{R}A)_\lambda \subseteq \overline{R}A.$$

(2)
$$\begin{aligned}(\overline{R}(A \cup B))(x) &= \bigvee_{y \in U} R(x,y) \wedge (A \cup B)(x) \\ &= \bigvee_{y \in U} R(x,y) \wedge (A(x) \vee B(x)) \\ &= \bigvee_{y \in U} (R(x,y) \wedge A(y)) \wedge (R(x,y) \wedge B(y)) \\ &= \left(\bigvee_{y \in U} R(x,y) \wedge A(y)\right) \vee \left(\bigvee_{y \in U} R(x,y) \wedge B(y)\right) \\ &= (\overline{R}A)(x) \vee (\overline{R}B)(x) = (\overline{R}A \cup \overline{R}B)(x),\end{aligned}$$

故

$$(\overline{R}(A \cup B)) = \overline{R}A \cup \overline{R}B.$$

(3) 因为 $A \subseteq B$,所以 $\forall y \in U, A(y) \leqslant B(y)$,则

$$(\underline{R}A)(x) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda \mid \forall y \in [x]_{R_\lambda}, R(x,y) \wedge \lambda \leqslant A(y)\}$$

$$\leqslant \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda \mid \forall y \in [x]_{R_\lambda}, R(x,y) \wedge \lambda \leqslant B(y)\}$$
$$= (\underline{R}B)(x)\text{，则}\underline{R}A \subseteq \underline{R}B.$$

(4) 因为$(\underline{R}A)_\lambda = \underline{R_\lambda}A_\lambda = \underline{R_\lambda}(\underline{R_\lambda}A_\lambda) = \underline{R_\lambda}(\underline{R}A)_\lambda = (\underline{R}(\underline{R}A))_\lambda$,

$$(\underline{R}A)_\lambda = \underline{R_\lambda}A_\lambda = \overline{R_\lambda}(\underline{R_\lambda}A_\lambda) = \overline{R_\lambda}(\underline{R}A)_\lambda = (\overline{R}(\underline{R}A))_\lambda,$$

则$\underline{R}A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(\underline{R}A)_\lambda = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(\underline{R}(\underline{R}A))_\lambda = \underline{R}(\underline{R}A)$，即$\underline{R}A = \underline{R}(\underline{R}A)$.

$\overline{R}(\underline{R}A) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(\overline{R}(\underline{R}A))_\lambda = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(\underline{R}A)_\lambda \subseteq \underline{R}A$，即$\overline{R}(\underline{R}A) \subseteq \underline{R}A$，又由(1)有$\underline{R}A \subseteq \overline{R}(\underline{R}A)$，则$\underline{R}A = \overline{R}(\underline{R}A)$.

综上 $\underline{R}A = \underline{R}(\underline{R}A) = \overline{R}(\underline{R}A)$.

(5) 由(3)易证.

(6) 若$\underline{R}A = A \Rightarrow \overline{R}A = \overline{R}(\underline{R}A) = \underline{R}A = A$，即有$\overline{R}A = A$.

若$\overline{R}A = A \Rightarrow \underline{R}A = \underline{R}(\overline{R}A) = \overline{R}A = A$，即有$\underline{R}A = A$.

(7) 显然.

注 当R是U上的模糊等价关系时，关系$\overline{R}(\backsim A) = \backsim(\underline{R}A)$，$\underline{R}(\backsim A) = \backsim(\overline{R}A)$一般不成立. 反例见后面的例题.

定义 4.3.4 设(U,R)为模糊近似空间，称A模糊粗下包含于B，若$\forall \lambda \in [0,1]$，有$(\underline{R}A)_\lambda \subseteq (\underline{R}B)_\lambda$；称$A$模糊粗上包含于$B$，若$\forall \lambda \in [0,1]$，有$(\overline{R}A)_\lambda \subseteq (\overline{R}B)_\lambda$.

定义 4.3.5 设(U,R)为模糊近似空间，$A,B \in F(U)$，称A与B是模糊粗下相等的，若$\forall \lambda \in [0,1]$，有$(\underline{R}A)_\lambda = (\underline{R}B)_\lambda$，记为$A \eqsim B$；称$A$与$B$模糊粗上相等的，若$\forall \lambda \in [0,1]$，有$(\overline{R}A)_\lambda = (\overline{R}B)_\lambda$，记为$A \simeq B$；称$A$与$B$是模糊粗相等的，若$A \eqsim B$且$A \simeq B$，记为$A \approx B$.

定理 4.3.3 设(U,R)为模糊近似空间，$A,B \in F(U)$，则有下列性质成立：

(1) $A \eqsim B \Leftrightarrow A \cap B \eqsim A$且$A \cap B \eqsim B$；

(2) $A \simeq B \Leftrightarrow A \cup B \simeq A$且$A \cup B \simeq B$；

(3) 若$A \simeq A'$且$B \simeq B'$，则$A \cup B \simeq A' \cup B'$；

(4) 若$A \eqsim A'$且$B \eqsim B'$，则$A \cap B \eqsim A' \cap B'$；

(5) 若$A \subseteq B$且$B \simeq \varnothing$，则$A \simeq \varnothing$；

(6) 若$A \subseteq B$且$A \eqsim U$，则$B \eqsim U$；

(7) 若$A \eqsim \varnothing$或$B \eqsim \varnothing$，则$A \cap B \eqsim \varnothing$；

(8) 若$A \simeq U$或$B \simeq U$，则$A \cup B \simeq U$；

(9) $A \eqsim U \Leftrightarrow A = U$；

(10) $A \simeq \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$.

证明　只证奇数项,偶数项类似可证. $\forall \lambda \in [0,1]$,

(1) $A \approx B \Leftrightarrow (\underline{R}A)_\lambda = (\underline{R}B)_\lambda = (\underline{R}A)_\lambda \cap (\underline{R}B)_\lambda = (\underline{R}(A \cap B))_\lambda$
$\Leftrightarrow A \cap B \approx A$ 且 $A \cap B \approx B$.

(3) 若 $A \simeq A'$ 且 $B \simeq B'$,有 $(\overline{R}A)_\lambda = (\overline{R}A')_\lambda$ 且 $(\overline{R}B)_\lambda = (\overline{R}B')_\lambda$,则 $(\overline{R}A)_\lambda \cup (\overline{R}B)_\lambda = (\overline{R}A')_\lambda \cup (\overline{R}B')_\lambda \Leftrightarrow (\overline{R}(A \cup B))_\lambda = (\overline{R}(A' \cup B'))_\lambda \Leftrightarrow A \cup B \simeq A' \cup B'$.

(5) $A \subseteq B \Leftrightarrow (\overline{R}A)_\lambda \subseteq (\overline{R}B)_\lambda$,因为 $(\overline{R}B)_\lambda = (\overline{R}\varnothing)_\lambda = \overline{R_\lambda}\varnothing = \varnothing$,所以 $(\overline{R}A)_\lambda = \varnothing$,即 $A \simeq \varnothing$.

(7) 因为 $(\underline{R}A)_\lambda = \varnothing$ 或 $(\underline{R}B)_\lambda = \varnothing$,所以 $(\underline{R}(A \cap B))_\lambda = (\underline{R}A)_\lambda \cap (\underline{R}B)_\lambda = \varnothing$,即 $A \cap B \approx \varnothing$.

(9) 因为 $A \approx U$,所以 $(\underline{R}A)_\lambda = (\underline{R}U)_\lambda = \underline{R_\lambda}U = U$,又因为 $(\underline{R}A)_\lambda \subseteq A_\lambda$,所以 $A_\lambda = U$,则 $A = U$.

下面在模糊近似空间的粗糙模糊集概念的基础上,引入粗糙度的概念,用该概念来刻画粗糙集边界的模糊性.

定义 4.3.6　设 U 是论域,$A \in F(U)$,则模糊集 A 的基数定义为

$$|A| = \sum_{x \in U} A(x).$$

定义 4.3.7　设 (U,R) 为模糊近似空间,$A \in F(U)$,则 A 关于 R 依参数 $0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$ 的下近似 $(\underline{R}A)_\alpha$ 和上近似 $(\overline{R}A)_\beta$ 分别定义为

$$(\underline{R}A)_\alpha = \{x \in U \mid (\underline{R}A)(x) \geqslant \alpha\}; \tag{4.24}$$

$$(\overline{R}A)_\beta = \{x \in U \mid (\overline{R}A)(x) \geqslant \beta\}. \tag{4.25}$$

根据上近似、下近似的截集定义

$$(\underline{R}A)_\alpha = \{x \in U \mid [x]_{R_\alpha} \subseteq A_\alpha\};$$

$$(\overline{R}A)_\beta = \{x \in U \mid [x]_{R_\beta} \cap A_\beta \neq \varnothing\}.$$

这里,$(\underline{R}A)_\alpha$ 可以理解为 U 中以 R_α 所确定的等价类中肯定属于模糊集 A 的隶属程度不小于 α 的那些对象的全体;$(\overline{R}A)_\beta$ 可以理解为 U 中以 R_β 所确定的等价类中可能属于模糊集 A 的隶属程度不小于 β 的那些对象的全体.

定理 4.3.4　设 (U,R) 为模糊近似空间,$A,B \in F(U)$,则对于 $0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$ 有:

(1) $(\overline{R}(A \cup B))_\beta = (\overline{R}A)_\beta \cup (\overline{R}B)_\beta$;$(\underline{R}(A \cap B))_\alpha = (\underline{R}A)_\alpha \cap (\underline{R}B)_\alpha$;

(2) 若 $A \subseteq B$,则 $(\underline{R}A)_\alpha \subseteq (\underline{R}B)_\alpha$;$(\overline{R}A)_\beta \subseteq (\overline{R}B)_\beta$;

(3) $(\underline{R}(A \cup B))_\alpha \supseteq (\underline{R}A)_\alpha \cup (\underline{R}B)_\alpha$;$(\overline{R}(A \cap B))_\beta \subseteq (\overline{R}A)_\beta \cap (\overline{R}B)_\beta$;

(4) $(\underline{R}A)_\alpha \subseteq (\overline{R}A)_\beta$.

证明 (1)、(2)、(3) 是引理4.3.1的特殊情况,易证从略.

(4) $(\underline{R}A)_\alpha \subseteq (\underline{R}A)_\beta \subseteq (\overline{R}A)_\beta$

定义 4.3.8 设(U,R)为模糊近似空间,$A \in F(U)$,定义A关于(U,R)的粗糙度ρ_A为:$\rho_A = 1 - \dfrac{|\underline{R}A|}{|\overline{R}A|}$,当$|\overline{R}A| = 0$时,约定$\rho_A = 0$;称$\eta_A = \dfrac{|\underline{R}A|}{|\overline{R}A|}$为$A$关于$(U,R)$的近似精度.

显然,$0 \leqslant \rho_A \leqslant 1, 0 \leqslant \eta_A \leqslant 1$.

定义 4.3.9 设(U,R)为模糊近似空间,$A \in F(U)$,对于$0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$,定义$A$在模糊近似空间$(U,R)$上关于参数$\alpha,\beta$的粗糙度$\rho_A^{\alpha,\beta}$为

$$\rho_A^{\alpha,\beta} = 1 - \frac{|(\underline{R}A)_\alpha|}{|(\overline{R}A)_\beta|}$$

约定,当$(\overline{R}A)_\beta = \varnothing$时,$\rho_A^{\alpha,\beta} = 0$.

由定义可以直接得到下列性质:

定理 4.3.5 (1) $0 \leqslant \rho_A^{\alpha,\beta} \leqslant 1$;

(2) 若β固定,则$|(\underline{R}A)_\alpha|$随$\alpha$增加而减少,从而$\rho_A^{\alpha,\beta}$随$\alpha$增加而增加;若$\alpha$固定,则$|(\overline{R}A)_\beta|$随$\beta$增加而减少,从而$\rho_A^{\alpha,\beta}$随$\beta$增加而减少.

定理 4.3.6 (1) 在(U,R)中,若$\forall \alpha \in [0,1]$,按照R_α所确定的x所在的等价类$[x]_{R_\alpha}$,都存在$y \in [x]_{R_\alpha}$,使得$A(y) < \alpha$,则$(\underline{R}A)_\alpha = \varnothing$,从而$\rho_A^{\alpha,\beta} = 1$;

(2) 若模糊集A在(U,R)中对于$\forall \alpha \in [0,1]$的每个R_α所确定的等价类$[x]_{R_\alpha}$中的隶属函数都是常数,且$\exists y \in [x]_{R_\alpha}$,则有$(\underline{R}A)_\alpha = (\overline{R}A)_\alpha$,从而$\rho_A^{\alpha,\alpha} = 0$.

证明 (1) 对于(U,R)的任意R_α所确定的等价类$[x]_{R_\alpha}$,$\exists y \in [x]_{R_\alpha}$,使$A(y) < \alpha$,则$(\underline{R}A)_\alpha = \{x \in U \mid [x]_{R_\alpha} \subseteq A_\alpha\} = \varnothing$,从而$\rho_A^{\alpha,\beta} = 1$;

(2) 若A在(U,R)的每个R_α所确定的等价类$[x]_{R_\alpha}$中,$A(x) = k$,则当$\alpha > k$时,$(\underline{R}A)_\alpha = (\overline{R}A)_\alpha = \varnothing$,从而根据约定$\rho_A^{\alpha,\alpha} = 0$;当$\alpha \leqslant k$时,$(\underline{R}A)_\alpha = (\overline{R}A)_\alpha = U$,从而根据定义$\rho_A^{\alpha,\alpha} = 0$.

定理4.3.7 若模糊集A的隶属函数恒为常数,即存在$\delta > 0$,使对于任意的$x \in U$有$A(x) = \delta$,且对$\forall \beta \in (0,1)$,$\exists y \in [x]_{R_\beta}$,则

(1) $0 < \beta < \delta < \alpha \leqslant 1$时,有$\rho_A^{\alpha,\beta} = 1$;

(2) 对于$0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$的其他情形,有$\rho_A^{\alpha,\beta} = 0$.

证明 (1) 当$0 < \beta < \delta < \alpha \leqslant 1$时,$(\underline{R}A)_\alpha = \{x \in U \mid [x]_{R_\alpha} \subseteq A_\alpha\} = \varnothing$,$(\overline{R}A)_\beta = \{x \in U \mid [x]_{R_\beta} \cap A_\beta \neq \varnothing\} = U$,从而$\rho_A^{\alpha,\beta} = 1$;

(2) 此时有两种情形:情形1. $\delta < \beta \leqslant \alpha$,这时$(\underline{R}A)_\alpha = (\overline{R}A)_\beta = \varnothing$,从而根据约定$\rho_A^{\alpha,\beta} = 0$;情形2. $\beta \leqslant \alpha \leqslant \delta$,这时$(\underline{R}A)_\alpha = (\overline{R}A)_\beta = U$,从而根据定义得

$\rho_A^{\alpha,\beta} = 0$.

定理 4.3.8 设(U,R)为模糊近似空间,$A,B \in F(U)$,且$A \subseteq B$,$0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$,则

(1) 如果$(\overline{R}A)_\beta = (\overline{R}B)_\beta$,那么$\rho_B^{\alpha,\beta} \leqslant \rho_A^{\alpha,\beta}$;

(2) 如果$(\underline{R}A)_\alpha = (\underline{R}B)_\alpha$,那么$\rho_A^{\alpha,\beta} \leqslant \rho_B^{\alpha,\beta}$;

(3) 如果存在$r > 0$,使对于任意$x \in U$有$A(x) \geqslant r$,且$\exists y \in [x]_{R_\beta}$,那么当$\beta \leqslant r$时,有$\rho_B^{\alpha,\beta} \leqslant \rho_A^{\alpha,\beta}$;

(4) 如果存在$r > 0$,使对于任意$x \in U$有$A(x) \geqslant r$,且$\exists y \in [x]_{R_\alpha}$,那么当$\alpha \leqslant r$时,有$\rho_B^{\alpha,\beta} = \rho_A^{\alpha,\beta} = 0$.

证明 由$A \subseteq B$,可得$(\underline{R}A)_\alpha \subseteq (\underline{R}B)_\alpha$,$(\overline{R}A)_\beta \subseteq (\overline{R}B)_\beta$,从而(1)和(2)成立;

(3) 由$\beta \leqslant r$可得$(\overline{R}A)_\beta = (\overline{R}B)_\beta = U$,从而由(1)知$\rho_B^{\alpha,\beta} \leqslant \rho_A^{\alpha,\beta}$;

(4) 由$\alpha \leqslant r$可得$(\underline{R}A)_\alpha = (\underline{R}B)_\alpha = U$,且$(\overline{R}A)_\beta = (\overline{R}B)_\beta = U$,从而$\rho_B^{\alpha,\beta} = \rho_A^{\alpha,\beta} = 0$.

上述定理说明,由$A \subseteq B$不能简单地判别$\rho_A^{\alpha,\beta} \leqslant \rho_B^{\alpha,\beta}$或$\rho_B^{\alpha,\beta} \leqslant \rho_A^{\alpha,\beta}$.

定理 4.3.9 设U是有限论域,(U,R)为模糊近似空间,$A,B \in F(U)$,$0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$,则有

$$\rho_{A\cup B}^{\alpha,\beta} \left| (\overline{R}A)_\beta \cup (\overline{R}B)_\beta \right| \leqslant \rho_A^{\alpha,\beta} \left| (\overline{R}A)_\beta \right| + \rho_B^{\alpha,\beta} \left| (\overline{R}B)_\beta \right| - \rho_{A\cap B}^{\alpha,\beta} \left| (\overline{R}A)_\beta \cap (\overline{R}B)_\beta \right| \tag{4.26}$$

证明 由定理 4.3.4 可得

$$\rho_{A\cup B}^{\alpha,\beta} = 1 - \frac{\left| (\underline{R}(A \cup B))_\alpha \right|}{(\overline{R}(A \cup B))_\beta}$$

$$= 1 - \frac{\left| (\underline{R}(A \cup B))_\alpha \right|}{\left| (\overline{R}A)_\beta \cup (\overline{R}B)_\beta \right|} \leqslant 1 - \frac{\left| (\underline{R}A)_\alpha \cup (\underline{R}B)_\alpha \right|}{\left| (\overline{R}A)_\beta \cup (\overline{R}B)_\beta \right|} \quad ①$$

$$\rho_{A\cap B}^{\alpha,\beta} = 1 - \frac{\left| (\underline{R}(A \cap B))_\alpha \right|}{\left| (\overline{R}(A \cap B))_\beta \right|}$$

$$= 1 - \frac{\left| (\underline{R}A)_\alpha \cap (\underline{R}B)_\alpha \right|}{\left| (\overline{R}(A \cap B))_\beta \right|} \leqslant 1 - \frac{\left| (\underline{R}A)_\alpha \cap (\underline{R}B)_\alpha \right.}{(\overline{R}A)_\beta \cap (\overline{R}B)_\beta \left. \right|} \quad ②$$

由于对任意的有限集A,B有:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad ③$$

则由式①、式②、式③有

$$\rho_{A\cup B}^{\alpha,\beta} \left| (\overline{R}A)_\beta \cup (\overline{R}B)_\beta \right| \leqslant \left| (\overline{R}A)_\beta \cup (\overline{R}B)_\beta \right| - \left| (\underline{R}A)_\alpha \cup (\underline{R}B)_\alpha \right|$$

$= |(\overline{R}A)_\beta| + |(\overline{R}B)_\beta| - |(\overline{R}A)_\beta \cap (\overline{R}B)_\beta| - |(\underline{R}A)_\alpha| - |(\underline{R}B)_\alpha|$
$+ |(\underline{R}A)_\alpha \cap (\underline{R}B)_\alpha|$
$\leqslant |(\overline{R}A)_\beta| + |(\overline{R}B)_\beta| - |(\underline{R}A)_\alpha| - |(\underline{R}B)_\alpha|$
$- \rho_{A\cap B}^{\alpha,\beta} |(\overline{R}A)_\beta \cap (\overline{R}B)_\beta|$

利用 $\rho_A^{\alpha,\beta}$ 和 $\rho_B^{\alpha,\beta}$ 的性质可知定理成立.

设 S 是 U 上的另一模糊等价关系,记 ρ_A 和 φ_A 分别是 A 关于 (U,R) 和 (U,S) 的粗糙度,$\rho_A^{\alpha,\beta}$ 和 $\varphi_A^{\alpha,\beta}$ 分别是 A 在 (U,R) 和 (U,S) 中关于 α,β 的粗糙度,η_A 和 ξ_A 分别是 A 关于 (U,R) 和 (U,S) 的近似精度.

定义 4.3.10 设 R,S 都是 U 上的模糊等价关系,如果 $\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall x \in U$,都有 $[x]_{S_\lambda} \subseteq [x]_{R_\lambda}$,则称模糊划分 S 细于模糊划分 R,记为 $S \subseteq R$.

定理 4.3.10 设 (U,R) 是模糊近似空间,$S \subseteq R, A \in F(U)$, $\forall 0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$,则

(1) $\underline{R}A \subseteq \underline{S}A, \overline{S}A \subseteq \overline{R}A$;

(2) $(\underline{R}A)_\alpha \subseteq (\underline{S}A)_\alpha, (\overline{S}A)_\beta \subseteq (\overline{R}A)_\beta$.

证明 由于 $S \subseteq R$,则 $\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall x \in U$,有 $[x]_{S_\lambda} \subseteq [x]_{R_\lambda}$,于是

(1) $(\underline{R}A)(x) = \left(\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda(\underline{R}A)_\lambda\right)(x) = \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid [x]_{R_\lambda} \subseteq A_\lambda\}$

$\leqslant \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda \mid [x]_{S_\lambda} \subseteq A_\lambda\} = \left(\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda(\underline{S}A)_\lambda\right)(x) = (\underline{S}A)(x)$,

从而 $\underline{R}A \subseteq \underline{S}A$;同理可得 $\overline{S}A \subseteq \overline{R}A$;

(2) 若 $x \in (\underline{R}A)_\alpha$,则 $[x]_{R_\alpha} \subseteq A_\alpha$,从而 $[x]_{S_\alpha} \subseteq A_\alpha$,故 $x \in (\underline{S}A)_\alpha$,于是 $(\underline{R}A)_\alpha \subseteq (\underline{S}A)_\alpha$;同理可得 $(\overline{S}A)_\beta \subseteq (\overline{R}A)_\beta$.

定理 4.3.11 设 (U,R) 是模糊近似空间,$S \subseteq R$, $A \in F(U)$,则

(1) $\varphi_A^{\alpha,\beta} \leqslant \rho_A^{\alpha,\beta}$;

(2) $\varphi_A \leqslant \rho_A$.

由定义和定理 4.3.10 直接可得.

注 定理 4.3.11 说明,模糊划分越细,所得近似的粗糙度就越小.

例 4.3.1 设 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $A = \left\{\frac{x_1}{0.5}, \frac{x_2}{0.3}, \frac{x_3}{0.3}, \frac{x_4}{0.6}, \frac{x_5}{0.8}\right\}$

模糊等价关系 R、S 分别由以下的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R$ 和 $\boldsymbol{M}_S$ 给出,

$$\boldsymbol{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.8 & 0.6 & 0.6 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 & 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 0.5 & 0.6 & 1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_S = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

则
$$\underline{R}A = \left\{\frac{x_1}{0.3}, \frac{x_2}{0.3}, \frac{x_3}{0.3}, \frac{x_4}{0.3}, \frac{x_5}{0.8}\right\}$$

$$\overline{R}A = \left\{\frac{x_1}{0.6}, \frac{x_2}{0.5}, \frac{x_3}{0.6}, \frac{x_4}{0.7}, \frac{x_5}{0.8}\right\}$$

近似精度
$$\eta_A = \frac{|\underline{R}A|}{|\overline{R}A|} = \frac{2}{3.2} = 0.625$$

若取 $\alpha \leqslant 0.3$，则 $(\underline{R}A)_\alpha = U, \rho_A^{\alpha,\beta} = 0$；若取 $\alpha > 0.8$，则 $A_\alpha = \varnothing$，从而 $(\overline{R}A)_\alpha = \{x \in U \mid [x]_{R_\alpha} \cap A_\alpha \neq \varnothing\} = \varnothing$，故 $\rho_A^{\alpha,\beta} = 1$，则

$$\underline{S}A = \left\{\frac{x_1}{0.3}, \frac{x_2}{0.3}, \frac{x_3}{0.3}, \frac{x_4}{0.6}, \frac{x_5}{0.8}\right\}$$

$$\overline{S}A = \left\{\frac{x_1}{0.5}, \frac{x_2}{0.4}, \frac{x_3}{0.5}, \frac{x_4}{0.6}, \frac{x_5}{0.8}\right\}$$

近似精度
$$\xi_A = \frac{|\underline{S}A|}{|\overline{S}A|} = \frac{2.3}{2.8} = 0.821,$$

易见 $\underline{R}A \subseteq \underline{S}A \subseteq \overline{S}A \subseteq \overline{R}A$.

即模糊划分越细，粗糙度越小，从而近似精度越高.

第五章　粗糙群与模糊粗糙群

§5.1　粗糙子群与模糊粗糙子群

设 X 是一个半群，R 是 X 上的同余关系，即 R 是满足如下条件的 X 上的一个等价关系：对 $\forall x \in X, (a,b) \in R \Rightarrow (ax,bx),(xa,xb) \in R$. 我们以 $[a]_R$ 记 a 所在的 R 同余类. 同余关系 R 决定了 X 上的一个近似空间 (X,R)，因此就有了 X 的子集的近似.

设 A 是 X 的任一子集，则 $\underline{R}(A) = \{x \in X \mid [x]_R \subseteq A\}$，$\overline{R}(A) = \{x \in X \mid [x]_R \cap A \neq \varnothing\}$，它们分别为 A 的 R - 下近似和 R - 上近似.

半群 X 上的一个同余关系 R 称为是完备的，如果 $\forall a,b \in X, [a]_R[b]_R = [ab]_R$.

根据上近似集、下近似集的定义，我们有下述定理.

定理 5.1.1　设 R,ρ,λ 是半群 X 上的同余关系，$A,B \subseteq X$，则

(1) $\underline{R}(A) \subseteq A \subseteq \overline{R}(A)$;

(2) $\overline{R}(A \cup B) = \overline{R}(A) \cup \overline{R}(B)$;

(3) $\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}(A) \cap \underline{R}(B)$;

(4) $A \subseteq B \Rightarrow \underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(B)$;

(5) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{R}(A) \subseteq \overline{R}(B)$;

(6) $\underline{R}(A \cup B) \supseteq \underline{R}(A) \cup \underline{R}(B)$;

(7) $\overline{R}(A \cap B) \subseteq \overline{R}(A) \cap \overline{R}(B)$;

(8) $\rho \subseteq \lambda \Rightarrow \underline{\rho}(A) \supseteq \underline{\lambda}(A)$;

(9) $\rho \subseteq \lambda \Rightarrow \overline{\rho}(A) \subseteq \overline{\lambda}(A)$.

定理 5.1.2　设 R 是半群 X 上的同余关系，A,B 是 X 的非空子集，则

$$\overline{R}(A)\,\overline{R}(B) \subseteq \overline{R}(AB). \tag{5.1}$$

证明　设 $c \in \overline{R}(A)\,\overline{R}(B)$,则存在 $a \in \overline{R}(A)$,$b \in \overline{R}(B)$ 使得 $c = ab$. 故存在 $x \in [a]_R \cap A$,$y \in [b]_R \cap B$. 由 R 是同余关系,$xy \in [a]_R[b]_R \subseteq [ab]_R$. 因为 $xy \in AB$,故 $xy \in [ab]_R \cap AB$,所以 $c = ab \in \overline{R}(AB)$.

定理 5.1.3　设 R 是半群 X 上的完备的同余关系,A,B 是 X 的非空子集,则

$$\underline{R}(A)\,\underline{R}(B) \subseteq \underline{R}(AB). \tag{5.2}$$

证明类似于定理 5.1.2 的证明,略.

定义 5.1.1　设 R 是半群 X 上的同余关系,X 的非空子集 A 称为 X 的一个上粗子半群,如果 $\overline{R}(A)$ 是 X 的子半群;X 的非空子集 A 称为 X 的一个下粗子半群,如果 $\underline{R}(A)$ 是 X 的子半群;X 的非空子集 A 称为 X 的一个粗糙半群,如果 $\underline{R}(A)$ 与 $\overline{R}(A)$ 均是 X 的子半群.

定理 5.1.4　设 R 是半群 X 上的同余关系,A,B 是 X 的非空子集,则如果 A 是 X 的一个子半群,则 A 是 X 的一个上粗子半群.

证明　设 A 是 X 的一个子半群,则由定理 5.1.1(1) 有 $A \subseteq \overline{R}(A)$. 由定理 5.1.2 及定理 5.1.1(5),有 $\overline{R}(A)\,\overline{R}(A) \subseteq \overline{R}(AA) \subseteq \overline{R}(A)$. 这意味着 $\overline{R}(A)$ 是 X 的子半群,故 A 是 X 的一个上粗子半群.

定理 5.1.5　设 R 是半群 X 上完备的同余关系,A,B 是 X 的非空子集,则如果 A 是 X 的一个子半群,则 A 是 X 的一个下粗子半群.

证明　设 A 是 X 的一个子半群,且 R 是完备的. 则有 $\underline{R}(A)\,\underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(AA) \subseteq \underline{R}(A)$. 这意味着 $\underline{R}(A)$ 是 X 的子半群,故 A 是 X 的一个下粗子半群.

推论 5.1.1　设 R 是半群 X 上完备的同余关系,A 是 X 的非空子集,如果 A 是 X 的一个子半群,则 A 是 X 的一个粗糙半群.

证明由定理 5.1.4 和定理 5.1.5 可得.

下面讨论给出群中关于正规子群同余的粗糙子群的概念.

设 X 是一个群,N 是群 X 的一个给定的正规子群,那么由 N 的互异的陪集可以决定 X 上的一个完备的同余关系 R_N,即

$$\forall\,(a,b) \in R_N \Leftrightarrow a \in bN \quad (\text{其中 } bN = Nb)$$

且 R_N 决定了 X 的一个分类: $\cup_{x \in X} xN$.

定义 5.1.2　设 R 是群 X 上的一个同余关系,X 的非空子集 A 称为 X 的一个上粗子群,如果 $\overline{R}(A)$ 是 X 的子群;X 的非空子集 A 称为 X 的一个下粗子群,如果 $\underline{R}(A)$ 是 X 的子群;X 的非空子集 A 称为 X 的一个粗糙子群,如果 $\underline{R}(A)$ 与 $\overline{R}(A)$ 均是 X 的子群.

定义 5.1.3　设 R 是群 X 上的一个同余关系,X 的非空子集 A 称为 X 的一个上粗正规子群,如果 $\overline{R}(A)$ 是 X 的正规子群. X 的非空子集 A 称为 X 的一个下粗正规子群,如果 $\underline{R}(A)$ 是 X 的正规子群;X 的非空子集 A 称为 X 的一个粗糙正规子

群,如果$\underline{R}(A)$ 与$\overline{R}(A)$ 均是 X 的正规子群.

定理5.1.6 设R_N是由群X上的一给定的正规子群N所决定的一个完备的同余关系,A 是群 X 的任一子群,且 $N \subseteq A$,则 A 是 X 的粗糙子群,即$\underline{R_N}(A)$ 与$\overline{R_N}(A)$ 均是 X 的子群.

证明 (1)A 是 X 的子群,由定理5.1.2,$\overline{R_N}(A)\ \overline{R_N}(A) \subseteq \overline{R_N}(A)$.

又 $\forall y \in \overline{R_N}(A)$,因$[y] = yN$,$yN \cap A \neq \emptyset$,则 $\exists z \in yN \cap A$,即 $z \in yN$,$z \in A$. 由 $z \in yN$,则 $\exists g \in N$,使得 $z = yg$,从而 $z^{-1} = (yg)^{-1} = g^{-1}y^{-1} \in Ny^{-1} = y^{-1}N$,由 $z \in A$,A 是 X 的子群,则 $z^{-1} \in A$,故 $z^{-1} \in y^{-1}N \cap A$,故 $y^{-1} \in \overline{R_N}(A)$,因而,$\overline{R_N}(A)$ 是 X 的子群.

(2)A 是 X 的子群,由定理5.1.3,$\underline{R_N}(A)\ \underline{R_N}(A) \subseteq \underline{R_N}(A)$.

又 $\forall y \in \underline{R_N}(A)$,因$[y] = yN$,则 $yN \subseteq A$,于是,$y \in A$,而 A 是 X 的子群,故 $y^{-1} \in A$. 由 $N \subseteq A$,于是,$y^{-1}N \subseteq AA \subseteq A$. 注意到$[y^{-1}] = y^{-1}N$,则$[y^{-1}] \subseteq A$,从而 $y^{-1} \in \underline{R_N}(A)$. 即,$\underline{R_N}(A)$ 是 X 的子群.

很容易得到下面的推论.

推论5.1.2 设R_N是由群X上的一给定的正规子群N所决定的一个完备的同余关系,A 是群 X 的任一子群,且 $N \subseteq A$,则$\underline{R_N}(A)/R_N$ 与$\overline{R_N}(A)/R_N$ 均是 X/R_N 的子群.

定理5.1.7 设R_N是由群X上的一给定的正规子群N所决定的一个完备的同余关系,A 是群 X 的任一正规子群,且 $N \subseteq A$,则 A 是 X 的粗糙正规子群,即$\underline{R_N}(A)$ 与$\overline{R_N}(A)$ 均是 X 的正规子群.

证明 (1) 由定理5.1.6已知$\overline{R_N}(A)$是X的子群. 以下只需证:$\forall x \in X$,$y \in \overline{R_N}(A)$,有 $x^{-1}yx \in \overline{R_N}(A)$.

事实上,因$[y] \cap A = yN \cap A \neq \emptyset$,则存在 $z \in yN \cap A$,即 $z \in yN$,$z \in A$. 因 N 是正规子群,则$x^{-1}zx \in x^{-1}(yN)x = (x^{-1}yx)N$. 因$A$是正规子群,$x^{-1}zx \in A$,于是,$x^{-1}zx \in (x^{-1}yx)N \cap A$,即$[x^{-1}yx] \cap A \neq \emptyset$,则 $x^{-1}yx \in \overline{R_N}(A)$. 所以,$\overline{R_N}(A)$ 是 X 的正规子群.

(2) 下证$\underline{R_N}(A)$ 是 X 的正规子群.

$\forall y \in \underline{R_N}(A)$,$x \in X$,则$[y] = yN \subseteq A$. 故 $y \in A$,A 是正规子群,故 $y^{-1} \in A$,$AA \subseteq A$,且 $N \subseteq A$,$(x^{-1}yx)N \subseteq AA \subseteq A$,即$[x^{-1}yx] \subseteq A$. 因而,$x^{-1}yx \in \underline{R_N}(A)$. 所以$\underline{R_N}(A)$ 是 X 的正规子群.

很容易得到下面的推论.

推论5.1.3　设R_N是由群X上一给定的正规子群N所决定的一个完备的同余关系，A是群X的任一正规子群，且$N \subseteq A$，则$\underline{R_N}(A)\Big/R_N$与$\overline{R_N}(A)\Big/R_N$均是$X\Big/R_N$的正规子群．

定义5.1.4　设R是群X上的一个同余关系，X的模糊子集A称为X的一个模糊上粗子群，如果$\overline{R}(A)$是X的模糊子群；X的模糊子集A称为X的一个模糊下粗子群，如果$\underline{R}(A)$是X的模糊子群；X的模糊子集A称为X的一个模糊粗糙子群，如果$\underline{R}(A)$与$\overline{R}(A)$均是X的模糊子群．

定义5.1.5　设R是群X上的一个同余关系，X的模糊子集A称为X的一个模糊上粗正规子群，如果$\overline{R}(A)$是X的模糊正规子群；X的模糊子集A称为X的一个模糊下粗正规子群，如果$\underline{R}(A)$是X的模糊正规子群；X的模糊子集A称为X的一个模糊粗糙正规子群，如果$\underline{R}(A)$与$\overline{R}(A)$均是X的模糊正规子群．

定理5.1.8　设R_N是由群X上的一给定的正规子群N所决定的一个完备的同余关系，A是群X的任一模糊子群，则A是X的模糊粗糙子群，即$\underline{R_N}(A)$与$\overline{R_N}(A)$均是X的模糊子群．

证明　由A是X的模糊子群知，$\forall \lambda \in [0,1]$，$A_\lambda$，$A_{\underline{\lambda}}$是$X$的子群，由定理5.1.6可得$\underline{R_N}(A_\lambda)$，$\overline{R_N}(A_{\underline{\lambda}})$是$X$的子群，再由引理4.2.1知$(\underline{R_N}(A))_\lambda$ $(=\underline{R_N}(A_\lambda))$与$(\overline{R_N}(A))_{\underline{\lambda}}$ $(=\overline{R_N}(A_{\underline{\lambda}}))$都是$X$的子群，由模糊集的分解定理及模糊子群的性质知$\underline{R_N}(A)$与$\overline{R_N}(A)$均是$X$的模糊子群，即$A$是$X$的模糊粗糙子群．

定理5.1.9　设R_N是由群X上一给定的正规子群N所决定的一个完备的同余关系，A是群X的任一模糊正规子群，则A是X的模糊粗糙正规子群，即$\underline{R_N}(A)$与$\overline{R_N}(A)$均是X的模糊正规子群．

证明　由A是X的模糊正规子群知，$\forall \lambda \in [0,1]$，$A_\lambda$，$A_{\underline{\lambda}}$是$X$的正规子群，由定理5.1.7可得$\underline{R_N}(A_\lambda)$，$\overline{R_N}(A_{\underline{\lambda}})$是$X$的正规子群，再由引理4.2.1知$(\underline{R_N}(A))_\lambda$ $(=\underline{R_N}(A_\lambda))$与$(\overline{R_N}(A))_{\underline{\lambda}}$ $(=\overline{R_N}(A_{\underline{\lambda}}))$都是$X$的正规子群，由模糊集的分解定理及模糊正规子群的性质知$\underline{R_N}(A)$与$\overline{R_N}(A)$均是X的模糊正规子群，即A是X的模糊粗糙正规子群．

§5.2　群中的粗糙子群的性质与同态

群中关于正规子群同余的粗糙子群有着很好的特殊性质．

性质 5.2.1 设 H 和 N 是群 X 的正规子群,A 是群 X 的任一非空子集,则

$$\overline{R_{H\cap N}}(A) = \overline{R_H}(A) \cap \overline{R_N}(A). \tag{5.3}$$

证明 注意到,设 H 和 N 是群 X 的正规子群,则 $H \cap N$ 也是群 X 的正规子群.

$$\begin{aligned}
&\forall c \in \overline{R_{H\cap N}}(A)\\
&\Leftrightarrow c(H \cap N) \cap A \neq \emptyset\\
&\Leftrightarrow \exists a \in c(H \cap N) \cap A\\
&\Leftrightarrow a \in c(H \cap N) \text{ 且 } a \in A\\
&\Leftrightarrow a \in cH, a \in A, \text{且 } a \in cN, a \in A\\
&\Leftrightarrow cH \cap A \neq \emptyset \text{ 且 } cN \cap A \neq \emptyset\\
&\Leftrightarrow c \in \overline{R_H}(A) \text{ 且 } c \in \overline{R_N}(A)\\
&\Leftrightarrow c \in \overline{R_H}(A) \cap \overline{R_N}(A).
\end{aligned}$$

所以,$\overline{R_{H\cap N}}(A) = \overline{R_H} \cap \overline{R_N}(A)$.

性质 5.2.2 设 H 和 N 是群 X 的正规子群,A 是群 X 的任一非空子集,则

$$\underline{R_{H\cap N}}(A) = \underline{R_H}(A) \cap \underline{R_N}(A). \tag{5.4}$$

证明

$$\begin{aligned}
&\forall c \in \underline{R_{H\cap N}}(A)\\
&\Leftrightarrow c(H \cap N) \subseteq A\\
&\Leftrightarrow cH \subseteq A \text{ 且 } cN \subseteq A\\
&\Leftrightarrow c \in \underline{R_H}(A) \text{ 且 } c \in \underline{R_N}(A)\\
&\Leftrightarrow c \in \underline{R_H}(A) \cap \underline{R_N}(A).
\end{aligned}$$

所以,$\underline{R_{H\cap N}}(A) = \underline{R_H} \cap \underline{R_N}(A)$.

注意到,设 H 和 N 是群 X 的正规子群,则 HN 也是群 X 的正规子群. 所以我们可以考虑 X 的任一非空子集 A 的上近似集、下近似集 $\overline{R_{HN}}(A)$ 和 $\underline{R_{HN}}(A)$.

性质 5.2.3 设 H 和 N 是群 X 的正规子群,A 是群 X 的任一子群,则

$$\overline{R_H}(A)\,\overline{R_N}(A) \subseteq \overline{R_{HN}}(A). \tag{5.5}$$

证明 $\forall c \in \overline{R_H}(A)\,\overline{R_N}(A)$,则 $\exists a \in \overline{R_H}(A)$,$b \in \overline{R_N}(A)$ 使得 $c = ab$. 于是,$\exists x, y \in X$ 使得 $x \in aH \cap A$,$y \in bN \cap A$. 从而,$x \in aH$,$y \in bN$,$x \in A$,且 $y \in A$. 由于 H 是正规的,$xy \in (aH)(bN) = a(Hb)N = a(bH)N = (ab)(HN) = c(HN)$. 由于 A 是群 X 的子群,$xy \in A$. 所以,$xy \in cHN \cap A$. 即 $c \in \overline{R_{HN}}(A)$. 所以,$\overline{R_H}(A)\,\overline{R_N}(A) \subseteq \overline{R_{HN}}(A)$.

性质 5.2.4 设 H 和 N 是群 X 的正规子群,A 是群 X 的任一子群,则

$$\overline{R_{HN}}(A) \subseteq \overline{R_H}(A)N \cap \overline{R_N}(A)H \tag{5.6}$$

证明 $\forall c \in \overline{R_{HN}}(A)$,$\exists x \in X$ 使得 $x \in cHN \cap A$. 于是,$x \in cHN$ 且 $x \in A$.

于是,$\exists a \in H, b \in N$,使得 $x = cab$. 因 H,N 是群 X 的正规子群,$a^{-1} \in H$ 且 $b^{-1} \in N$,$x = cab \in cHb = cbH$. 因而 $x \in cbH \cap A$. 这样,$cb \in \overline{R_H}(A)$. 因此,$c \in \overline{R_H}(A)b^{-1} \subseteq \overline{R_H}(A)N$.

类似地,$c \in \overline{R_N}(A)H$. 因此,

$$\overline{R_{HN}}(A) \subseteq \overline{R_H}(A)N \cap \overline{R_N}(A)H$$

性质 5.2.5　设 H 和 N 是群 X 的正规子群,A 是群 X 的任一非空子群,则

$$\underline{R_H}(A)\ \underline{R_N}(A) \subseteq \underline{R_{HN}}(A). \tag{5.7}$$

证明　$\forall c \in \underline{R_H}(A)\ \underline{R_N}(A)$,则 $\exists a \in \underline{R_H}(A), b \in \underline{R_N}(A)$ 使得 $c = ab$. 于是 $aH \subseteq A, bN \subseteq A$. 因 H 是群 X 的正规子群,A 是群 X 的子群,则

$(ab)HN = (a(bH))N = (a(Hb))N = ((aH)b)N = (aH)(bN) \subseteq AA \subseteq A$.

所以,$c = ab \in \underline{R_{HN}}(A)$. 即 $\underline{R_H}(A)\ \underline{R_N}(A) \subseteq \underline{R_{HN}}(A)$.

以下讨论群中的粗糙集的有关同态问题.根据代数学中群的第二同构定理,我们有下述定理.

定理 5.2.1　设 f 是群 X_1 到群 X_2 上的一个满同态,$\ker f \subseteq N$,且 N 是 X_1 的正规子群,对于 X_1 的任一非空子集 A,则

(1)　$$f(\underline{R_N}(A)) \subseteq \underline{R_{f(N)}}(f(A)), \tag{5.8}$$

(2)　$$f(\overline{R_N}(A)) = \overline{R_{f(N)}}(f(A)). \tag{5.9}$$

证明　(1) $\forall a \in \underline{R_N}(A)$,则 $[a] = aN \subseteq A$. 从而 $f([a]) = f(aN) = f(a)f(N) \subseteq f(A)$. 又因 $f(a)f(N) \in X_2/f(N)$. 因此,$f(a) \in \underline{R_{f(N)}}(f(A))$. 即 $f(\underline{R_N}(A)) \subseteq \underline{R_{f(N)}}(f(A))$.

(2) $\forall a \in \overline{R_N}(A) \Leftrightarrow [a] \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow f([a] \cap A) = f([a]) \cap f(A) \neq \emptyset \Leftrightarrow f(a)f(N) \cap f(A) \neq \emptyset \Leftrightarrow f(a) \in \overline{R_{f(N)}}(f(A))$. 因此,$f(\overline{R_N}(A)) = \overline{R_{f(N)}}(f(A))$.

注　结论(1)不能取为等号,即 $f(\underline{R_N}(A)) \supseteq \underline{R_{f(N)}}(f(A))$,一般是不成立的.例如,置换群 $X_1 = \{(1),(123),(132),(12),(13),(23)\}$ 到关于普通乘法的群 $X_2 = \{1,-1\}$ 间的一个映射 $\varphi: X_1 \to X_2$,使得 $(1) \to 1, (123) \to 1, (132) \to 1, (12) \to -1, (13) \to -1, (23) \to -1$ 是群 X_1 到群 X_2 上的一个满同态,且 $N = \{(1),(123),(132)\} = \ker f$ 是 X_1 的正规子群. 从而,$X_1/N = \{N, (12)N\}$.

而 $X_2/f(N) = X_2/\{1\} = \{\{1\},\{-1\}\}$. 令 $A = \{(1),(123),(132),$

(12)},于是,$\underline{R_N}(A) = N$,故 $f(\underline{R_N}(A)) = \{1\}$. 但 $f(A) = \{1, -1\}$,从而,$\underline{R_{f(N)}}(f(A)) = \{1, -1\}$,即 $f(\underline{R_N}(A)) \supseteq \underline{R_{f(N)}}(f(A))$ 是不成立的.

定理 5.2.2 设 f 是群 X_1 到群 X_2 上的一个满同态,$\ker f \subseteq N$,且 N 是 X_1 的正规子群,对于 X_1 的任一正规子群 A,且 $N \subseteq A$,则

(1)
$$X_1 / \overline{R_N}(A) \cong X_2 / \overline{R_{f(N)}}(f(A)). \tag{5.10}$$

(2) 映射 $\zeta: a\,\underline{R_N}(A) \to f(a)\,\underline{R_{(f(N))}}f(A)$ 是 $X_1 / \underline{R_N}(A)$ 到 $X_2 / \underline{R_{f(N)}}(f(A))$ 的满同态.

证明 (1) 因 $\ker f \subseteq N \subseteq A \subseteq \overline{R_N}(A)$,且 A 是 X_1 的正规子群,由定理5.1.7,$\overline{R_N}(A)$ 是 X_1 的正规子群,根据群的第二同构定理及定理5.2.1(2) 有 $X_1 / \overline{R_N}(A) \cong X_2 / \overline{R_{f(N)}}(f(A))$.

(2) 我们首先证明:映射 $\Phi: bf(\underline{R_{f(N)}}(A)) \to b\,\underline{R_{f(N)}}(f(A))$ 是 $X_2/f(\underline{R_N}(A))$ 到 $X_2 / \underline{R_{f(N)}}(f(A))$ 上的一个满同态.

事实上,因 $\ker f \subseteq A$,则 $\ker f \subseteq \underline{R_N}(A)$,且 $\underline{R_N}(A)$ 是 X_1 的正规子群,则 $f(\underline{R_N}(A))$ 是 X_2 正规子群. 又由定理 5.2.1,$f(\underline{R_N}(A)) \subseteq \underline{R_{f(N)}}(f(A))$,且 $\underline{R_{f(N)}}(f(A))$ 是 X_2 的正规子群,则 $f(\underline{R_N}(A))$ 是 $\underline{R_{f(N)}}(f(A))$ 的正规子群,故

$$\underline{R_{f(N)}}(f(A)) = \bigcup_{a \in \underline{R_{f(N)}(f(A))}} af(\underline{R_N}(A))$$

这意味着 Φ 是一个满射. 于是,

$$\Phi[(b_1 f(\underline{R_N}(A)))(b_2 f(\underline{R_N}(A)))] = b_1 b_2\,\underline{R_{f(N)}}(f(A))$$
$$= (b_1\,\underline{R_{f(N)}}(f(A)))(b_2\,\underline{R_{f(N)}}(f(A))) = \Phi(b_1 f(\underline{R_N}(A)))\Phi(b_2 f(\underline{R_N}(A)))$$

故 $\Phi: bf(\underline{R_{f(N)}}(A)) \to b\,\underline{R_{f(N)}}(f(A))$ 是 $X_2/f(\underline{R_N}(A))$ 到 $X_2 / \underline{R_{f(N)}}(f(A))$ 的满同态.

其次,因 $\ker f \subseteq N \subseteq A$,则 $\ker f \subseteq \underline{R_N}(A)$,且 $\underline{R_N}(A)$ 是 X_1 的正规子群. 于是由群的第二同构定理知,$\psi: a\,\underline{R_N}(A) \to f(a)f(\underline{R_N}(A))$ 是 $X_1 / \underline{R_N}(A)$ 到 $X_2 / \underline{R_{f(N)}}(f(A))$ 间的同构. 故 $\zeta(=\Phi\psi): a\,\underline{R_N}(A) \to f(a)\,\underline{R_{f(N)}}(f(A))$ 是 $X_1 / \underline{R_N}(A)$ 到 $X_2 / \underline{R_{f(N)}}(f(A))$ 的满同态.

§5.3 半群中的粗素理想与模糊粗素理想

定义 5.3.1 设 R 是半群 S 上的同余关系,S 的非空子集 A 称为 S 上的上粗左(右,双侧)理想,如果 $\overline{R}(A)$ 是 S 的左(右,双侧)理想;S 的非空子集 A 称为 S 上的下粗左(右,双侧)理想,如果 $\underline{R}(A)$ 是 S 的左(右,双侧)理想. 双侧理想简称为理想.

定理 5.3.1　设 R 是半群 S 上的同余关系,若 S 的非空子集 A 是 S 的左(右,双侧)理想,则

(1) A 是 S 的一个上粗左(右,双侧)理想;

(2) A 是 S 的一个下粗左(右,双侧)理想.

证明　只证(1),(2)的证明类似.

(1) 设 A 是 S 的一个左理想,则 $SA \subseteq A$,注意到 $\overline{R}(S) = S$,则有 $S\overline{R}(A) = \overline{R}(S)\overline{R}(A) \subseteq \overline{R}(SA) \subseteq \overline{R}(A)$,所以 $\overline{R}(A)$ 是 S 的左理想,即 A 是 S 的一个上粗左理想.同理可证上粗右理想和上粗双侧理想情况.

推论 5.3.1　设 R 是半群 S 上的同余关系,若 S 的非空子集 A 是 S 的左(右,双侧)理想,则

(1) $\overline{R}(A)\big/S$ 是 S/R 的一个左(右,双侧)理想;

(2) $\underline{R}(A)\big/S$ 是 S/R 的一个左(右,双侧)理想.

定义 5.3.2　设 R 是半群 S 上的同余关系,S 的模糊子集 A 称为 S 的模糊上粗左(右,双侧)理想,如果 $\overline{R}(A)$ 是 S 的模糊左(右,双侧)理想;S 的模糊子集 A 称为 S 的模糊下粗左(右,双侧)理想,如果 $\underline{R}(A)$ 是 S 的模糊左(右,双侧)理想.模糊双侧理想简称为模糊理想.

定理 5.3.2　设 R 是半群 S 上的同余关系,A 是 S 的模糊子集,若 A 是 S 的模糊左(右,双侧)理想,则

(1) A 是 S 的一个模糊上粗左(右,双侧)理想;

(2) A 是 S 的一个模糊下粗左(右,双侧)理想.

证明　只证(1),(2)的证明类似.

设 A 是 S 的模糊左理想,则 $\forall \lambda \in [0,1]$,$A_\lambda$ 是 S 的一个左理想,从而 $\overline{R}(A_\lambda) = (\overline{R}(A))_\lambda$ 是 S 的左理想,由定理 4.2.2 知 $\overline{R}(A)$ 是 S 的模糊左理想,即 A 是 S 的模糊上粗左理想.同理可证模糊上粗右理想及模糊上粗双侧理想的情况.

定义 5.3.3　设 R 是半群 S 上的一个同余关系,A 是 S 的非空子集,若 $\underline{R}(A)$ 是 S 的一个素理想,则称 A 是 S 的下粗素理想.

定理 5.3.3　若 A 是半群 S 的素理想,R 是 S 上的一个同余关系,则 A 是 S 的下粗素理想.

证明　由 A 是半群 S 的理想,则 A 是 S 的下粗理想.

$\forall x,y \in S, xy \in \underline{R}(A)$.即 $[xy]_R \subseteq A$,又 $[x]_R[y]_R \subseteq [xy]_R$,故 $[x]_R[y]_R \subseteq A$.假设 $x \notin \underline{R}(A)$ 且 $y \notin \underline{R}(A)$,即 $[x]_R \not\subseteq A$ 且 $[y]_R \not\subseteq A$ 则 $\exists x' \in [x]_R$ 但 $x' \notin A$,$\exists y' \in [y]_R$ 但 $y' \notin A$,则 $x'y' \in [x]_R[y]_R \subseteq A$,由 A 是素理想知 $x' \in A$ 或

$y' \in A$,与上述矛盾. 故 $x \in \underline{R}(A)$ 或 $y \in \underline{R}(A)$,即 A 是 S 的下粗素理想.

定义 5.3.4 设 R 是半群 S 上的一个同余关系,A 是 S 的非空子集,$\overline{R}(A)$ 是 S 的一个素理想,则称 A 是 S 的上粗素理想.

下述例 5.3.1 说明半群中的素理想不一定是上粗素理想.

例 5.3.1 设 $S = \{a,b,c,d\}$ 是一个半群,运算由表 5.1 定义,S 上的同余关系 R 所决定的同余类为 $\{a\}$, $\{c\}$, $\{b,d\}$,则对 $A = \{d\}$, $\overline{R}(A) = \{b,d\}$. 显然 A 是 S 的素理想. $\overline{R}(A)$ 是 S 的理想,但 $ac = b \in \overline{R}(A)$, $a \notin \overline{R}(A)$, $c \notin \overline{R}(A)$,故 $\overline{R}(A)$ 不是素理想.

表 5.1

	a	b	c	d
a	a	b	b	d
b	b	b	b	d
c	b	b	b	d
d	d	d	d	d

但我们将条件加强,可以得到下面的定理.

定理 5.3.4 设 R 是半群 S 上的一个完备同余关系,若 A 是 S 的素理想,则 A 是 S 的上粗素理想.

证明 由 A 是 S 的理想,则 $\overline{R}(A)$ 是 S 的理想.

$\forall x,y \in S, xy \in \overline{R}(A)$,则 $[xy]_R \cap A \neq \varnothing$,又 A 是完备同余关系,故 $[x]_R[y]_R \cap A \neq \varnothing$,所以 $\exists x'y' \in [x]_R[y]_R$,其中 $x' \in [x]_R, y' \in [y]_R$,且 $x'y' \in A$. 由 A 是素理想,则 $x' \in A$ 或 $y' \in A$. 故 $x' \in A$ 时,$x' \in [x]_R \cap A$,即 $[x]_R \cap A \neq \varnothing$,从而 $x \in \overline{R}(A)$,当 $y' \in [y]_R$ 时,$y' \in [y]_R \cap A$,即 $[y]_R \cap A \neq \varnothing$,从而 $y \in \overline{R}(A)$. 故 $\overline{R}(A)$ 是素理想,即 A 是 S 的上粗素理想.

由上述两个定理知,当 A 是半群 S 的素理想时,由完备同余关系 R 决定的 $\underline{R}(A)$, $\overline{R}(A)$ 均是 S 的素理想,此时我们称 A 为粗素理想. 但反之,当 $\underline{R}(A)$, $\overline{R}(A)$ 均是 S 的素理想时,理想 A 却不一定是 S 的素理想. 由下述例 5.3.2 可以说明.

例 5.3.2 设 $S = \{a,b,c,d\}$ 是一个半群,其上运算由表 5-2 定义,S 上的完备同余关系 R 所决定的同余类为 $\{a,b,c\}$, $\{d\}$,则对 $A = \{a,d\}$, $\underline{R}(A) = \{d\}$, $\overline{R}(A) = \{a,b,c,d.\}$ 显然 A, $\underline{R}(A)$, $\overline{R}(A)$ 均是 S 的理想,且 $\underline{R}(A)$, $\overline{R}(A)$ 都是 S 的素理想,但 $bc = a \in A$, $b \notin A$, $c \notin A$,故 A 不是 S 的素理想.

表 5.2

	a	b	c	d
a	a	a	a	d
b	a	b	a	d
c	a	a	c	d
d	d	d	d	d

设 R 是半群 S 上的同余关系，在商半群 S/R 中，S 的子集 A 的上近似、下近似可以表示如下：

$$\underline{R}(A)/R = \{X \in S/R \mid X \subseteq A\}, \tag{5.11}$$

$$\overline{R}(A)/R = \{X \in S/R \mid X \cap A \neq \varnothing\}. \tag{5.12}$$

定理 5.3.5　设 R 是 S 上的完备同余关系，

(1) 若 $A \subseteq S$ 是 S 的下粗素理想，则$\underline{R}(A)/R$ 是 S/R 的素理想；

(2) 若 $A \subseteq S$ 是 S 的上粗素理想，则$\overline{R}(A)/R$ 是 S/R 的素理想．

证明　(1) 由 A 是 S 的下粗理想知$\underline{R}(A)/R$ 是的 S/R 理想.
$\forall [x]_R, [y]_R \in S/R$, $[x]_R[y]_R = [xy]_R \in \underline{R}(A)/R$, 即$[xy]_R \subseteq A$，故 $xy \in \underline{R}(A)$，由 A 是素理想知$\underline{R}(A)$ 是素理想，故 $x \in \underline{R}(A)$ 或 $y \in \underline{R}(A)$，从而$[x]_R \subseteq A$ 或$[y]_R \subseteq A$，即$[x]_R \in \underline{R}(A)/R$ 或$[y]_R \in \underline{R}(A)/R$ 故$\underline{R}(A)/R$ 是 S/R 的素理想.

(2) 同理可证$\overline{R}(A)/R$ 是 S/R 的素理想．

下面给出半群中的模糊粗素理想的概念和性质．

定义 5.3.5　设 R 是半群 S 上的一个同余关系，S 的模糊子集 A 称为模糊下粗素理想，如果$\underline{R}(A)$ 是 S 的模糊素理想；A 称为 S 的模糊上粗素理想，如果$\overline{R}(A)$ 是 S 的模糊素理想.

定理 5.3.6　设 R 是 S 上的同余关系，$\forall \lambda \in [0,1]$，则：

(1) A 是 S 的模糊下粗素理想 $\Leftrightarrow A_\lambda$ 是 S 的下粗素理想；

(2) A 是 S 的模糊上粗素理想 $\Leftrightarrow A_\lambda$ 是 S 的上粗素理想．

证明　由引理 4.2.1 很容易得知此结论．

定理 5.3.7　设 R 是半群 S 上的同余关系，若 A 是 S 的模糊素理想，则：

(1) $\underline{R}(A)$ 是 S 的模糊素理想；

(2) 当 R 是 S 上的完备同余关系时，$\overline{R}(A)$ 也是 S 的模糊素理想，此时称 A 为 S 的模糊粗素理想．

证明　由 A 是 S 的模糊素理想知，A_λ，$A_{\dot\lambda}$（$\lambda \in [0,1]$）都是 S 的素理想．

（1）由定理 5.3.6 知 $\underline{R}(A_\lambda)$ 是 S 的素理想，又由引理 4.2.1 有 $(\underline{R}(A))_\lambda = \underline{R}(A_\lambda)$，故 $\underline{R}(A)$ 是 S 的模糊素理想．

（2）由定理 5.3.6 知 $\overline{R}(A_{\dot\lambda})$ 是 S 的素理想，又由引理 4.2.1 有 $(\overline{R}(A))_{\dot\lambda} = \overline{R}(A_{\dot\lambda})$，故 $\overline{R}(A)$ 是 S 的模糊素理想．

下面我们讨论同态问题．

引理 5.3.1　设 f 是半群 S 到半群 T 的一个满同态，R_2 是半群 T 上的同余关系，则：

（1）$R_1 = \{(x_1,x_2) \in S \times S \mid (f(x_1),f(x_2)) \in R_2\}$ 是半群 S 上的同余关系；f 是单射时，若 R_2 完备，则 R_1 完备；

（2）
$$f(\overline{R_1}(A)) = \overline{R_2}(f(A));\tag{5.13}$$

（3）$f(\underline{R_1}(A)) \subseteq \underline{R_2}(f(A))$，$f$ 是单射时有
$$f(\underline{R_1}(A)) = \underline{R_2}(f(A)).\tag{5.14}$$

证明　（1）显然 R_1 是半群 S 上的同余关系．

若 f 是单射时，$\forall x' \in [x_1x_2]_{R_1}$，则 $f(x') \in [f(x_1x_2)]_{R_2} = [f(x_1)]_{R_2}[f(x_2)]_{R_2}$，于是 $\exists f(x_1') \in [f(x_1)]_{R_2}$，$\exists f(x_2') \in [f(x_2)]_{R_2}$，使 $f(x') = f(x_1')f(x_2') = f(x_1'x_2')$，则 $x_1' \in [x_1]_{R_1}$，$x_2' \in [x_2]_{R_2}$，$x' = x_1'x_2'$，则 $x' \in [x_1]_{R_1}[x_2]_{R_1}$，故 $[x_1x_2]_{R_1} \subseteq [x_1]_{R_1}[x_2]_{R_1}$. 又已知 $[x_1x_2]_{R_1} \supseteq [x_1]_{R_1}[x_2]_{R_1}$，所以 $[x_1x_2]_{R_1} = [x_1]_{R_1}[x_2]_{R_1}$，可得 R_1 是完备同余关系.

（2）下面证明 $f(\overline{R_1}(A)) = \overline{R_2}(f(A))$.

$\forall y \in f(\overline{R_1}(A))$，$\exists x \in \overline{R_1}(A)$，$f(x) = y$. 于是 $[x]_{R_1} \cap A \neq \varnothing$，故 $\exists x' \in A$，且 $x' \in [x]_{R_1}$. 从而 $f(x') \in f(A)$，$f(x') \in [f(x)]_{R_2}$，故 $[f(x)]_{R_2} \cap f(A) \neq \varnothing$，即 $y = f(x) \in \overline{R_2}(f(A))$. 反之，$\forall y \in \overline{R_2}(f(A))$，$\exists x \in S$，$f(x) = y$. 有 $[y]_{R_2} \cap f(A) \neq \varnothing$，故 $\exists y' \in f(A)$，$y' \in [y]_{R_2}$ 可知 $\exists x' \in A$，$f(x') = y'$，从而 $f(x') \in [f(x)]_{R_2}$，可得到 $x' \in [x]_{R_1}$，故 $x' \in [x]_{R_1} \cap A$，就可得 $x \in \overline{R_1}(A)$，所以 $y = f(x) \in f(\overline{R_1}(A))$. 综上所述知，等式成立.

（3）$\forall y \in f(\underline{R_1}(A))$，$\exists x \in \underline{R_1}(A)$，$f(x) = y$. 有 $[x]_{R_1} \subseteq A$.

$\forall y' \in [y]_{R_2}$，$\exists x' \in S$，$f(x') = y'$，由 $f(x') \in [f(x)]_{R_2}$，有 $x' \in [x]_{R_1}$，故 $x' \in A$，$y' = f(x') \in f(A)$，所以 $[y]_{R_2} \subseteq f(A)$，即 $y \in \underline{R_2}(f(A))$，故 $f(\underline{R_1}(A)) \subseteq \underline{R_2}(f(A))$. f 是单射时，$\forall y \in \underline{R_2}(f(A)) \Rightarrow \exists x \in S$，$f(x) = y$，$[f(x)]_{R_2} \subseteq f(A) \Rightarrow \forall x' \in [x]_{R_1}$，$f(x') \in [f(x)]_{R_2} \subseteq f(A) \Rightarrow x' \in A \Rightarrow [x]_{R_1} \subseteq A \Rightarrow x \in$

$\underline{R_1}(A) \Rightarrow y = f(x) \in f(\underline{R_1}(A))$ 故 $f(\underline{R_1}(A)) \supseteq \underline{R_2}(f(A))$，从而 $f(\underline{R_1}(A)) = \underline{R_2}(f(A))$.

定理5.3.8　设 f 是半群 S 到半群 T 的一个满同态，R_2 是半群 T 上的完备同余关系，A 是 S 的任意子集，若 $R_1 = \{(x_1,x_2) \in S \times S \mid (f(x_1),f(x_2)) \in R_2\}$，则：

(1) $\overline{R_1}(A)$ 是 S 的理想 $\Leftrightarrow \overline{R_2}(f(A))$ 是 T 的理想；

(2) $\overline{R_1}(A)$ 是 S 的素理想 $\Leftrightarrow \overline{R_2}(f(A))$ 是 T 的素理想.

证明　(1)(必要性) 由 $\overline{R_1}(A)$ 是 S 的理想知，$S\overline{R_1}(A) \subseteq \overline{R_1}(A)$，

故 $f(S\overline{R_1}(A)) \subseteq f(\overline{R_1}(A))$. 由 f 是满同态可得，$Tf(\overline{R_1}(A)) \subseteq f(\overline{R_1}(A))$，由引理5.3.1知 $T\overline{R_2}(f(A)) \subseteq \overline{R_2}(f(A))$，同理可得 $\overline{R_2}(f(A))T \subseteq \overline{R_2}(f(A))$，所以 $\overline{R_2}(f(A))$ 是 T 的理想.

(充分性) 对于 $\forall x \in S, \forall x' \in \overline{R_1}(A)$，由 $\overline{R_2}(f(A))$ 是 T 的理想，则

$f(xx') \in f(S\overline{R_1}(A)) = T\overline{R_2}(f(A)) \subseteq \overline{R_2}(f(A)) = f(\overline{R_1}(A))$，故 $\exists x_0 \in \overline{R_1}(A), f(xx') = f(x_0)$，则 $[x_0]_{R_1} \cap A \neq \emptyset, x_0 \in [xx']_{R_1}$，于是 $[xx']_{R_1} \cap A \neq \emptyset$，从而 $xx' \in \overline{R_1}(A)$，故 $S\overline{R_1}(A) \subseteq \overline{R_1}(A)$. 同理 $\overline{R_1}(A)S \subseteq \overline{R_1}(A)$，故 $\overline{R_1}(A)$ 是 S 的理想.

(2)(必要性) 由前述知 $\overline{R_2}(f(A))$ 是 T 的理想.

$\forall y_1,y_2 \in T, \exists x_1,x_2 \in S, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$，若 $y_1y_2 \in \overline{R_2}(f(A))$，则 $[f(x_1)f(x_2)]_{R_2} \cap f(A) \neq \emptyset$，又 R_2 完备，故 $[f(x_1)]_{R_2}[f(x_2)]_{R_2} \cap f(A) \neq \emptyset$，所以 $\exists f(x_1') \in [f(x_1)]_{R_2}, \exists f(x_2') \in [f(x_2)]_{R_2}, f(x_1')f(x_2') = f(x_1'x_2') \in f(A)$，故 $x_1' \in [x]_{R_1}, x_2' \in [x]_{R_1}, \exists x \in A, f(x) = f(x_1'x_2')$，从而 $x_1'x_2' \in [x_1]_{R_1}[x_2]_{R_1} = [x_1x_2]_{R_1}$，可知 $[x_1'x_2']_{R_1} = [x_1x_2]_{R_1}$，又 $x \in A$，且由等价定义知 $x \in [x_1'x_2']_{R_1}$，故 $x \in [x_1x_2]_{R_1} \cap A$，所以 $y_1 = f(x_1) \in f(\overline{R_1}(A)) = \overline{R_2}(f(A))$，或 $y_2 = f(x_2) \in f(\overline{R_1}(A)) = \overline{R_2}(f(A))$，故 $\overline{R_2}(f(A))$ 是 T 的素理想.

(必要性) 由前述知 $\overline{R_1}(A)$ 是 S 的理想.

$\forall x_1,x_2 \in X, x_1x_2 \in \overline{R_1}(A)$，则 $f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2) \in f(\overline{R_1}(A)) = \overline{R_2}(f(A))$，由 $\overline{R_2}(f(A))$ 是素理想，可得 $f(x_1) \in f(\overline{R_1}(A))$ 或 $f(x_2) \in f(\overline{R_1}(A))$，于是，$\exists x_1' \in \overline{R_1}(A), f(x_1') = f(x_1)$ 或 $\exists x_2' \in \overline{R_1}(A), f(x_2') = f(x_2)$，从而 $[x_1']_{R_1} \cap A \neq \emptyset, x_1' \in [x_1]_{R_1}$，或 $[x_2']_{R_1} \cap A \neq \emptyset, x_2' \in [x_2]_{R_1}$. 从而 $[x_1]_{R_1} \cap A \neq \emptyset$ 或 $[x_2]_{R_1} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x_1 \in \overline{R_1}(A)$ 或 $x_2 \in \overline{R_1}(A)$，故 $\overline{R_1}(A)$ 是 S 的素理想.

定理5.3.9　设 f 是半群 S 到半群 T 的一个同构，R_2 是半群 T 上的完备同余

关系,A 是 S 的任意子集,若 $R_1 = \{(x_1,x_2) \in S \times S \mid (f(x_1),f(x_2)) \in R_2\}$,则 $\underline{R_1}(A)$ 是 S 的(素)理想 $\Leftrightarrow \underline{R_2}(f(A))$ 是 T 的(素)理想.

证明 由引理 5.3.1 知 $f(\underline{R_1}(A)) = \underline{R_2}(f(A))$,故类似定理 5.3.6 可得证.

显然在商半群中有下述的推论成立.

推论 5.3.2 设 f 是半群 S 到半群 T 的一个同构,R_2 是半群 T 上的完备同余关系,A 是 S 的子集,若 $R_1 = \{(x_1,x_2) \in S \times S \mid (f(x_1),f(x_2)) \in R_2\}$,则 $\overline{R_1}(A)/R_1(\underline{R_1}(A)/R_1)$ 是 S/R_1 的(素)理想 $\Leftrightarrow \overline{R_2}(f(A))/R_2(\underline{R_2}(f(A))/R_2)$ 是 T/R_2 的(素)理想.

可将定理 5.3.8 和定理 5.3.9 推广到模糊集.

定理 5.3.10 设 f 是半群 S 到半群 T 的一个满同态,R_2 是半群 T 上的完备同余关系,A 是 S 的模糊子集,若 $R_1 = \{(x_1,x_2) \in S \times S \mid (f(x_1),f(x_2)) \in R_2\}$,则:

(1) $\overline{R_1}(A)$ 是 S 的模糊(素)理想 $\Leftrightarrow(\overline{R_2}(f(A))$ 是 T 的模糊(素)理想;

(2) f 是单射时,$\underline{R_1}(A)$ 是 S 的模糊(素)理想 $\Leftrightarrow \underline{R_2}(f(A))$ 是 T 的模糊(素)理想.

证明 (1) $\overline{R_1}(A)$ 是 S 的模糊(素)理想 $\Leftrightarrow(\overline{R_1}(A))_\lambda$ 是 S 的普通(素)理想,

由引理 4.2.1 得 $(\overline{R_1}(A))_\lambda = \overline{R_1}(A_\lambda)$,又由定理 5.3.8 知其等价于 $\overline{R_2}(f(A_\lambda))$ 是 T 的普通(素)理想. $\forall y \in f(A_\lambda)$,知 $\exists x \in A_\lambda, f(x) = y, A(x) > \lambda$,故 $\bigvee_{f(x)=y} A(x) > \lambda$,即 $f(A)(y) > \lambda$,故 $y \in (f(A))_\lambda$,显然反之也成立,故 $f(A_\lambda) = (f(A))_\lambda \Leftrightarrow \overline{R_2}((f(A))_\lambda)$ 是 T 的普通(素)理想.

由引理 4.2.1 知,$\overline{R_2}((f(A))_\lambda) = (\overline{R_2}(f(A)))_\lambda \Leftrightarrow \overline{R_2}(f(A))$ 是 T 的模糊(素)理想.

(2) 由引理 5.3.1,f 是单射时 $f(\underline{R_1}(A)) = \underline{R_2}(f(A))$,类似(1)可证.

推论 5.3.3 设 f 是半群 S 到半群 T 的一个同构,R_2 是半群 T 上的完备同余关系,A 是 S 的模糊子集,若 $R_1 = \{(x_1,x_2) \in S \times S \mid (f(x_1),f(x_2)) \in R_2\}$,则 $\overline{R_1}(A)/R_1(\underline{R_1}(A)/R_1)$ 是 S/R_1 的(素)理想 $\Leftrightarrow \overline{R_2}(f(A)/R_2(\underline{R_2}(f(A))/R_2)$ 是 T/R_2 的(素)理想.

第六章 粗糙环、粗糙理想、模糊粗糙环与模糊粗糙理想

§6.1 粗糙子环与模糊粗糙子环

粗糙子群的许多结论我们可以很容易地推广到环中.

设$(X,+,\cdot,I)$是一个环,I是环X的一给定的理想.则由I可以决定一个X上的完备的同余关系R_I,即

$$\forall(a,b)\in R_I \Leftrightarrow a-b\in I.$$

定义6.1.1 设R是环X上的一个同余关系,X的非空子集A称为X的一个上粗子环,如果$\overline{R}(A)$是X的子环;X的非空子集A称为X的一个下粗子环,如果$\underline{R}(A)$是X的子环;X的非空子集A称为X的一个粗糙子环,如果$\underline{R}(A)$与$\overline{R}(A)$均是X的子环.

定理6.1.1 设R_I是环X上给定的理想I所决定的完备的同余关系,A是环X的任一子环,则A是X的粗糙子环,即,$\underline{R_I}(A)$与$\overline{R_I}(A)$均是X的子环.

证明 A是X的子环,即$(A,+)$是$(X,+)$的子群,且$(A,\cdot)$是$(X,\cdot)$的子半群.则$(\underline{R_I}(A),+)$和$(\overline{R_I}(A),+)$均是$(X,+)$的子群,且$(\underline{R_I}(A),\cdot)$和$(\overline{R_I}(A),\cdot)$均是$(X,\cdot)$子半群.又由于运算封闭及分配律自然保持,所以$\underline{R_I}(A)$与$\overline{R_I}(A)$均是$X$的子环.

推论6.1.1 设R_I是环X上的给定的理想I决定的一个完备的同余关系,如A是X的子环,则$\underline{R_I}(A)/R_I$与$\overline{R_I}(A)/R_I$均为X/R_I的子环。

定理6.1.2 设R_I是环X上的给定的理想I决定的一个完备的同余关系,如果A是X的一个左(右,双侧)理想,见$I\subseteq A$,则$\underline{R_I}(A)$与$\overline{R_I}(A)$均是X的左(右,双侧)理想。

证明 设A是X的左理想,则$(A,+)$是$(X,+)$的子群,且$XA\subseteq X$,由定理

5.1.2 及定理5.3.1知，$(\underline{R_I}(A),+)$ 及 $(\overline{R_I}(A),+)$ 是 $(X,+)$ 的子群，且 $X\underline{R_I}(A)\subseteq\underline{R_I}(A)$，所以$\underline{R_I}(A)$ 均是 X 的在理想．同理证明右理想和双侧理想的情况。

推论6.1.2 设R_I是由环X上的给定的理想I决定的一个完备的同余关系，如果A是X的一个左（右，双侧）理想，见$I\subseteq A$，则$\underline{R_I}(A)\big/R_I$ 与$\overline{R_I}(A)\big/R_I$ 均是 X/R_I 的左（右，双侧）理想．

类似群中的粗糙集的有关同态问题，环中也有下述定理．

定理6.1.3 设f是环X_1到环X_2上的一个满同态，$\ker f\subseteq I$，且I是X_1的理想，对于X_1的任一非空子集A，则

(1)
$$f(\underline{R_I}(A))\subseteq\underline{R_{f(I)}}(f(A)),\tag{6.1}$$

(2)
$$f(\overline{R_I}(A))=\overline{R_{f(I)}}(f(A)).\tag{6.2}$$

定理6.1.4 设f是环X_1到环X_2上的一个满同态，$\ker f\subseteq I$，且I是X_1的理想，对于X_1的任一理想A，且$I\subseteq A$，则

(1)
$$X_1/\overline{R_I}(A)\cong X_2/\overline{R_{f(I)}}(f(A)).\tag{6.3}$$

(2) 映射 $\zeta:a\,\underline{R_I}(A)\rightarrow f(a)\,\underline{R_{f(I)}f}(A)$ 是 $X_1/\underline{R_I}(A)$ 到 $X_2/\underline{R_{f(I)}}(f(A))$ 的满同态．

推论6.1.3 设f是环X_1到环X_2上的一个满同态，$\ker f\subseteq I$，且I是X_1的理想，对于X_1的任一模糊子集A，则：

(1)
$$f(\underline{R_I}(A))\subseteq\underline{R_{f(I)}}(f(A))\tag{6.4}$$

(2)
$$f(\overline{R_I}(A))=\overline{R_{f(I)}}(f(A)).\tag{6.5}$$

引理6.1.1 设$f:X_1\rightarrow X_2$是环的同态，R_I是X_1中给定理想I所决定的完备同余关系，且$\ker f\subseteq I$，则(1)$f([x]_{R_I})=[f(x)]_{R_{f(I)}}$；(2)$x'\in[x]_{R_I}\Leftrightarrow f(x')\in[f(x)]_{R_{f(I)}}$．

证明 (1) $\forall y\in f([x]_{R_I})\Rightarrow\exists x'\in[x]_{R_I},f(x')=y\Rightarrow x-x'\in I,f(x')=y\Rightarrow f(x-x')=f(x)-f(x')=f(x)-y\in f(I)\Rightarrow y\in[f(x)]_{R_{f(I)}}$．

$\forall y\in[f(x)]_{R_{f(I)}}\Rightarrow y-f(x)\in f(I)\Rightarrow y\in f(I)+f(x)=f(I+x)\Rightarrow\exists x'\in x+I,y=f(x')\Rightarrow x'\in[x]_{R_I},y=f(x')\in f([x]_{R_I})$，故 $f([(x)]_{R_I})=[f(x)]_{R_{f(I)}}$．

(2)$x'\in[x]_{R_I}\Rightarrow f(x')\in f([x]_{R_I})=[f(x)]_{R_{f(I)}}$．反之，$f(x')\in[f(x)]_{R_{f(I)}}=f([x]_{R_I})\Rightarrow\exists x''\in[x]_{R_I},f(x')=f(x'')\Rightarrow[x'']_{R_I}=[x]_{R_I},f(x')-f(x'')=f(x'-x'')=0\Rightarrow x'-x''\in\ker f\subseteq I\Rightarrow x'\in[x'']_{R_I}=[x]_{R_I}$，故上述结论成立．

引理6.1.2 设$f:X_1\rightarrow X_2$是环的单同态，I是X_1的理想，A是X_1的非空子集，则

$$f(\underline{R_I}(A)) = \underline{R_{f(I)}}(f(A)). \tag{6.6}$$

证明　$\forall y \in \underline{R_{f(I)}}(f(A)) \Rightarrow y \in [y]_{R_{f(I)}} \subseteq f(A) \Rightarrow \exists x \in A, f(x) = y$，由引理6.1.1得$[y]_{R_{f(I)}} = [f(x)]_{R_{f(I)}} = f([x]_{R_I}) \subseteq f(A)$，$f$是单射有

$$[x]_{R_I} \subseteq A \Rightarrow x \in \underline{R_I}(A) \Rightarrow y = f(x) \in f(\underline{R_I}(A)).$$

反之，$\forall y \in f(\underline{R_I}(A)) \Rightarrow \exists x \in \underline{R_I}(A), f(x) = y \Rightarrow [x]_{R_I} \subseteq A$，由引理6.1.1可得

$$f([x]_{R_I}) = [f(x)]_{R_{f(I)}} = [y]_{R_{f(I)}} \subseteq f(A) \Rightarrow y \in \underline{R_{f(I)}}f(A).$$

综上所述知$f(\underline{R_I}(A)) = \underline{R_{f(I)}}(f(A))$.

定理6.1.5　设$f: X_1 \to X_2$是环的满同态，R_I是由X_1的理想I决定的完备同余关系，A是X_1的子集且$\ker f \subseteq I \subseteq A$，则：

(1)A是X_1的上粗子环（理想）$\Leftrightarrow f(A)$是X_2的上粗子环（理想）；

(2)f是单射时，A是X_1的下粗子环（理想）$\Leftrightarrow f(A)$是X_2的下粗子环（理想）.

证明　(1)由$f: X_1 \to X_2$是环的满同态，$\ker f \subseteq I \subseteq A$，则$\overline{R_I}(A)$是$X_1$的子环（理想）$\Leftrightarrow f(\overline{R_I}(A))$是$X_2$的子环，又由定理6.1.2，$f(\overline{R_I}(A)) = \overline{R_{f(I)}}(f(A))$，故$A$是$X_1$的上粗子环$\Leftrightarrow f(A)$是$X_2$的上粗子环. 同理证上粗理想情况.

(2) $\forall x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0$，$\forall x' \in [x]_{R_I} \Rightarrow x' - x \in I \subseteq A \Rightarrow f(x' - x) = f(x') - f(x) = f(x') \in f(I) \subseteq f(A)$，

f是单射可得$x' \in A$，故$[x]_{R_I} \subseteq A$，即$x \in \underline{R_I}(A)$，得$\ker f \subseteq \underline{R_I}(A)$. 由引理6.1.2，$f(\underline{R_I}(A)) = \underline{R_{f(I)}}(f(A))$，故$A$是$X_1$的下粗子环$\Leftrightarrow f(A)$是$X_2$的下粗子环. 同理证下粗理想情况.

定义6.1.2　设R是环X上的一个同余关系，X的模糊子集A称为X的一个模糊上粗子环（理想），如果$\overline{R}(A)$是X的模糊子环（理想）. X的模糊子集A称为X的一个模糊下粗子环（理想），如果$\underline{R}(A)$是X的模糊子环（理想）. X的模糊子集A称为X的一个模糊粗糙子环（理想），如果$\underline{R}(A)$与$\overline{R}(A)$均是X的模糊子环（理想）.

定理6.1.6　设R_I是由环X上给定的理想I所决定的一个完备的同余关系，A是环X的任一模糊子环（理想），则A是X的模糊粗糙子环（理想），即$\underline{R_I}(A)$与$\overline{R_I}(A)$均是X的模糊子环（理想）.

证明　由A是X的模糊子环知，$\forall \lambda \in [0,1]$，$A_\lambda, A_{\dot{\lambda}}$是$X$的子环，由定理5.2.1可得$\underline{R_I}(A_\lambda)$，$\overline{R_I}(A_{\dot{\lambda}})$是$X$的子环，再由引理4.2.1知$(\underline{R_I}(A))_\lambda (= \underline{R_I}(A_\lambda))$与$(\overline{R_I}(A))_{\dot{\lambda}} (= \overline{R_I}(A_{\dot{\lambda}}))$都是$X$的子环，由模糊集的分解定理及模糊子环的性质知$\underline{R_I}(A)$与$\overline{R_I}(A)$均是$X$的模糊子环，即$A$是$X$的模糊粗糙子环. 同

理可证模糊粗糙理想.

定理 6.1.7 设 $f: X_1 \to X_2$ 是环的满同态, R_I 是 X_1 中给定理想 I 所决定的完备同余关系,且 $\ker f \subseteq I$. 若 B 是 X_2 的模糊粗糙子环(理想),则 $f^{-1}(B)$ 是 X_1 的模糊粗糙子环(理想).

证明 $\forall x,y \in X_1, \overline{R_I}(f^{-1}(B))(x-y) = \bigvee_{x'y' \in [x-y]_{R_I}} f^{-1}(B)(x'-y')$

$= \bigvee_{x'y' \in [x-y]_{R_I}} B(f(x'-y')) = \bigvee_{f(x')-f(y') \in [f(x)-f(y)]_{R_{f(I)}}} B(f(x')-f(y'))$

$= \overline{R_{f(I)}}(B)(f(x)-f(y)) \geqslant \overline{R_{f(I)}}(B)(f(x)) \wedge \overline{R_{f(I)}}(B)f(y)$

由此,可得

$\overline{R_I}(f^{-1}(B))(x-y) \geqslant \overline{R_{If(I)}}(f^{-1}(B))(x) \wedge \overline{R_I}(f^{-1}(B))(y).$

同理, $\forall x,y \in X_1, \overline{R_I}(f^{-1}(B))(xy) = \bigvee_{x'y' \in [xy]_{R_I}} f^{-1}(B)(x'y')$

$= \bigvee_{x'y' \in [xy]_{R_I}} B(f(x'y')) = \bigvee_{f(x')f(y') \in [f(x)f(y)]_{R_{f(I)}}} B(f(x')f(y'))$

$= \overline{R_{f(I)}}(B)(f(x)f(y)) \geqslant \overline{R_{f(I)}}(B)(f(x)) \wedge \overline{R_{f(I)}}(B)(f(x))$

由此,可得

$\overline{R_I}(f^{-1}(B))(xy) \geqslant (\underline{R_I}(f^{-1}(B))(x)) \wedge (\underline{R_I}(f^{-1}(B))(y))$

故 $f^{-1}(B)$ 是 X_1 的模糊粗糙子环. 同理证模糊粗糙理想情况.

定理 6.1.8 设 $f: X_1 \to X_2$ 是环的同态, R_I 是 X_1 中给定理想 I 所决定的完备同余关系且 $\ker f \subseteq I$.

(1) 若 f 是满射, A 是 X_1 的模糊上粗子环(理想),则 $f(A)$ 是 X_2 的模糊上粗子环(理想);

(2) 若 f 是单射, A 是 X_1 的模糊下粗子环(理想),则 $f(A)$ 是 X_2 的模糊下粗子环(理想).

证明 (1) $\forall x,y \in X_2, \exists x_0,y_0 \in X, f(x_0)=x, f(y_0)=y$,

$\forall x'-y' \in [x-y]_{R_{f(I)}}, \exists x_0', y_0', f(x_0')=x', f(y_0')=y'$. 由上述定理、扩张原理及引理 6.1.1 可得,

$$\begin{aligned}
&\overline{R_{f(I)}}(f(A))(x-y) \\
&= \bigvee_{x'-y' \in [x-y]_{R_{f(I)}}} f(A)(x'-y') \\
&= \bigvee_{x'-y' \in [x-y]_{R_{f(I)}}} \left(\bigvee_{f(z)=f(x_0')-f(y_0')} A(z) \right) \\
&= \bigvee_{x'-y'=f(x_0'-y_0')} \left(\bigvee_{x_0'-y_0' \in [x_0-y_0]_{R_I}} A(x_0'-y_0') \right) \\
&= \bigvee_{x'-y'=f(x_0'-y_0')} (\overline{R_I}A(x_0-y_0)).
\end{aligned}$$

由 A 是 X 的模糊上粗子环,则

$$\overline{R_{f(I)}}(f(A))(x-y) \geqslant (\bigvee_{(x'=f(x_0'))}(\overline{R_I}A(x_0))) \wedge (\bigvee_{y'=f(y_0')}(\overline{R_I}A(y_0)))$$
$$= \overline{R_{f(I)}}(f(A)(x)) \wedge \overline{R_{f(I)}}(f(A)(y)).$$

同理，$\forall x,y \in X_2$，$\overline{R_{f(I)}}(f(A))(xy) \geqslant (\overline{R_{f(I)}}(f(A)(x)) \wedge (\overline{R_{f(I)}}(f(A)(y))$. 故 $f(A)$ 是 X' 的模糊上粗子环. 同理证模糊上粗理想情况.

(2) 当 f 是单射时，由引理 6.1.2 直接可得.

§6.2　环中关于理想同余的粗糙集的性质

下面讨论环中关于理想同余的粗糙集的性质.

设 $(X, +, \cdot, I)$ 是环，I 是 X 的给定理想，I 决定 X 上的一个完备的同余关系 R_I，称为理想同余，$\forall (a,b) \in R_I \Leftrightarrow a-b \in I$. 设 A 是 X 的子集，分别定义 A 关于 R_I 的下近似、上近似为

$$\underline{R_I}(A) = \{x \in X \mid [x]_{R_I} \subseteq A\}$$
$$\overline{R_I}(A) = \{x \in X \mid [x]_{R_I} \cap A \neq \varnothing\}$$

称 $R_I(A) = (\underline{R_I}(A), \overline{R_I}(A))$ 为 R_I 的粗糙集.

若 I, J 是环 X 的理想，则

$$I \cap J = \{x \in X \mid x \in I, x \in J\},$$
$$I + J = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in I, x_2 \in J\},$$
$$IJ = \{x_1x_2 \mid x_1 \in I, x_2 \in J\},$$
$$I : J = \{x \mid x \in X, x' \in J \Rightarrow xx' \in I\}$$

均是环 X 的理想. 由这些理想所决定的同余关系分别记为：$R_{I\cap J}, R_{I+J}, R_{IJ}, R_{I:J}$.

性质 6.2.1　设 A 是环 X 的任意子集，若 I, J 是环 X 的理想，则

(1) $$\underline{R_{I\cap J}}(A) \supseteq \underline{R_I}(A)(\underline{R_J}(A)) \tag{6.7}$$

(2) $$\overline{R_{I\cap J}}(A) \subseteq \overline{R_I}(A)(\overline{R_J}(A)). \tag{6.8}$$

证明　(1) $\forall x \in \underline{R_I}(A)$，$[x]_{R_I} \subseteq A \Rightarrow \forall x' \in X$，若 $x - x' \in I$，则 $x' \in A$，于是，若 $x - x' \in I \cap J \subseteq I$，则 $x' \in A \Rightarrow [x]_{R_{I\cap J}} \subseteq A \Rightarrow x \in \underline{R_{I\cap J}}(A)$，故 $\underline{R_I}(A) \subseteq \underline{R_{I\cap J}}(A)$，同理 $\underline{R_J}(A) \subseteq \underline{R_{I\cap J}}(A)$.

(2) $\forall x \in \overline{R_{I\cap J}}(A) \Rightarrow [x]_{R_{I\cap J}} \cap A \neq \varnothing \Rightarrow \exists x' \in A$，且 $x - x' \in I \cap J \subseteq I \Rightarrow [x]_{R_I} \cap A \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{R_I}(A) \Rightarrow \overline{R_{I\cap J}}(A) \subseteq \overline{R_I}(A)$，同理 $\overline{R_{I\cap J}}(A) \subseteq \overline{R_J}(A)$.

推广到可数个，显然有下述结论：

当 $I_i (i = 1,2,3,\cdots)$ 是环 X 的理想，$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$ 所决定的同余关系记为 $R_{\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i}$，则

$\forall i$，有$\underline{R_{\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i}}(A) \supseteq \underline{R_{I_i}}(A)$，$\overline{R_{\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i}}(A) \subseteq \overline{R_{I_i}}(A)$.

性质 6.2.2 I,J 是环 X 的理想，A 是 X 的任意子集，则

$$\underline{R_{I+J}}(A) \subseteq \underline{R_I}(A) \quad (\underline{R_J}(A)).$$

证明 $\forall x \in \underline{R_{I+J}}(A) \Rightarrow [x]_{R_{I+J}} \subseteq A \Rightarrow \forall x' \in X$，若 $x - x' \in I + J$，则 $x' \in A$. 又 $I \subseteq I + J, J \subseteq I + J \Rightarrow \forall x' \in X$，若 $x - x' \in I \subseteq I + J$，则 $x' \in A \Rightarrow [x]_{R_I} \subseteq A \Rightarrow x \in \underline{R_I}(A)$，故$\underline{R_{I+J}}(A) \subseteq \underline{R_I}(A)$，同理$\underline{R_{I+J}}(A) \subseteq \underline{R_J}(A)$.

性质 6.2.3 I,J 是环 X 的理想，$(A, +)$ 是 X 的独异点，则

$$\overline{R_{I+J}}(A) = \overline{R_I}(A) + \overline{R_J}(A).$$

证明 $\forall x \in \underline{R_{I+J}}(A) \Leftrightarrow [x]_{R_{I+J}} \cap A \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists x' \in A$ 且 $x - x' \in I + J$，又$(A, +)$是 X 的独异点 $\Leftrightarrow x \in I + J + A = (I + A) + (J + A) \Leftrightarrow \exists y \in I + A, \exists z \in J + A$，$x = y + z \Leftrightarrow \exists y' \in A, y - y' \in I, \exists z' \in A, z - z' \in J, x = y + z \Leftrightarrow [y]_{R_I} \cap A \neq \varnothing$，$[z]_{R_J} \cap A \neq \varnothing, x = y + z \Leftrightarrow y \in \overline{R_I}(A), z \in \overline{R_J}(A), x = y + z \Leftrightarrow x \in \overline{R_I}(A) + \overline{R_J}(A)$，故$\overline{R_{I+J}}(A) = \overline{R_I}(A) + \overline{R_J}(A)$.

性质 6.2.4 I,J 是环 X 的理想，A 是 X 的半子环，且 $A \supseteq I, A \supseteq J$，则

(1) $\overline{R_{IJ}}(A) \supseteq \overline{R_I}(A)\ \overline{R_J}(A)$. 当 A 是理想时

$$\overline{R_{IJ}}(A) = \overline{R_I}(A)\ \overline{R_J}(A). \tag{6.9}$$

(2)
$$\underline{R_{IJ}}(A) \supseteq \underline{R_I}(A)\ \underline{R_J}(A). \tag{6.10}$$

证明 (1) $\forall x \in \overline{R_I}(A)\ \overline{R_J}(A)$ 时 $\Rightarrow \exists y \in \overline{R_I}(A), \exists z \in \overline{R_J}(A), x = yz \Rightarrow [y]_{R_I} \cap A \neq \varnothing, [z]_{R_J} \cap A \neq \varnothing, x = yz \Rightarrow \exists y' \in A, y - y' \in I, \exists z' \in A, z - z' \in J, x = yz \Rightarrow y \in I + A, z \in J + A, x = yz \Rightarrow x = yz \in (I + A)(J + A) = IJ + IA + AJ + AA$，由 I,J 是 X 的理想且 A 是半子环可得，

$IJ + IA + AJ + AA \subseteq IJ + I + J + A \subseteq IJ + A + A + A \subseteq IJ + A \Rightarrow x \in IJ + A \Rightarrow \exists x' \in A, x - x' \in IJ \Rightarrow [x]_{R_{IJ}} \cap A \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{R_{IJ}}(A)$，故$\overline{R_{IJ}}(A) \supseteq \overline{R_I}(A)\ \overline{R_J}(A)$.

A 是理想时，有$(I + A)(J + A) = IJ + A$，上述的逆过程成立，故

$$\overline{R_{IJ}}(A) = \overline{R_I}(A)\ \overline{R_J}(A).$$

(2) $\forall x \in \underline{R_I}(A)\ \underline{R_J}(A)$ 时 $\Rightarrow \exists y \in \underline{R_I}(A), \exists z \in \underline{R_J}(A), x = yz$，又 $\forall x' \in [x]_{R_{IJ}}$，即 $x' - x \in IJ$，故 $\exists y' \in I, \exists z' \in J, x' - x = y'z' \Rightarrow x' = yz + y'z'$，由 $y \in \underline{R_I}(A) \subseteq A, z \in \underline{R_J}(A) \subseteq A$，有 $yz \in AA \subseteq A$，又 $y'z' \in IJ \subseteq I \subseteq A \Rightarrow x' = yz + y'z' \in A + A \subseteq A \Rightarrow [x]_{R_{IJ}} \subseteq A \Rightarrow x \in \underline{R_{IJ}}(A)$，故$\underline{R_{IJ}}(A) \supseteq \underline{R_I}(A)\ \underline{R_J}(A)$.

性质 6.2.5 设 A 是环 X 的任意子集，若 I,J 是环 X 的理想，则

(1)
$$\underline{R_I}(A) = \underline{R_{I:J}}(A) \tag{6.11}$$

(2)
$$\overline{R_I}(A) = \overline{R_{I:J}}(A) \tag{6.12}$$

证明　(1) 由同余性质易得, $x-x'\in I\Leftrightarrow\forall y\in J,(x-x')y\in I\Leftrightarrow x-x'\in I:J$, $\forall x\in\underline{R_I}(A)\Leftrightarrow[x]_{R_I}\subseteq A\Leftrightarrow\forall x'\in X$,若 $x-x'\in I$,则 $x'\in A\Leftrightarrow\forall x'\in X$,若 $x-x'\in I:J$,则 $x'\in A\Leftrightarrow[x]_{R_{I:J}}\subseteq A\Leftrightarrow x\in\underline{R_{I:J}}(A)$,所以 $\underline{R_I}(A)=\underline{R_{I:J}}(A)$.

(2) $\forall x\in\overline{R_I}(A)\Leftrightarrow[x]_{R_I}\cap A\neq\varnothing\Leftrightarrow\exists x'\in A,x-x'\in I\Leftrightarrow\exists x'\in A,\forall y\in J,(x-x')y\in I\Leftrightarrow\exists x'\in A,x-x'\in I:J\Leftrightarrow[x]_{R_{I:J}}\cap A\neq\varnothing\Leftrightarrow x\in\overline{R_{I:J}}(A)$,故

$$\overline{R_I}(A)=\overline{R_{I:J}}(A).$$

性质 6.2.6　$I_i(i=1,2,3,\cdots)$ 是环 X 的理想,且 $I_1\subseteq I_2\subseteq I_3\subseteq\cdots$, $\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$ 所决定的同余关系记为 $R_{\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i}$,则

(1)
$$\underline{R_{\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i}}(A)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\underline{R_{I_i}}(A)\tag{6.13}$$

(2)
$$\overline{R_{\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i}}(A)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{R_{I_i}}(A)\tag{6.14}$$

证明　(1) $\forall x\in\underline{R_{\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i}}(A)\Leftrightarrow[x]_{R_{\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i}}\subseteq A\Leftrightarrow\forall x'\in X$,若 $x-x'\in\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$,则 $x'\in A\Leftrightarrow\forall x'\in X,\forall i$,若 $x-x'\in I_i\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$,则 $x'\in A\Leftrightarrow\forall i,[x]_{R_{I_i}}\subseteq A\Leftrightarrow\forall i,x\in\underline{R_{I_i}}(A)\Leftrightarrow x\in\bigcap_{i=1}^{\infty}\underline{R_{I_i}}(A)$,故 $\underline{R_{\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i}}(A)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\underline{R_{I_i}}(A)$.

(2) $\forall x\in\overline{R_{\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i}}(A)\Leftrightarrow[x]_{R_{\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i}}\cap A\neq\varnothing\Leftrightarrow\exists x'\in A,x-x'\in\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\Leftrightarrow\exists x'\in A$, $\exists i,x-x'\in I_i\Leftrightarrow\exists i,[x]_{R_i}\cap A\neq\varnothing\Leftrightarrow\exists i,x\in\overline{R_{I_i}}(A)\Leftrightarrow x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{R_{I_i}}(A)$,故

$$\overline{R_{\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i}}(A)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{R_{I_i}}(A).$$

在环 X 中,A,B 是 X 的子集,我们定义 $A+B=\{a+b\mid a\in A,b\in B\}$, $AB=\{ab\mid a\in A,b\in B\}$. 我们可得下述性质:

性质 6.2.7　设 A,B 是环 X 的任意子集,I 是环 X 的理想,则

(1)
$$\underline{R_I}(A+B)=\underline{R_I}(A)+\underline{R_I}(B)\tag{6.15}$$

(2)
$$\overline{R_I}(A+B)=\overline{R_I}(A)+\overline{R_I}(B)\tag{6.16}$$

证明　(1) $\forall x\in\underline{R_I}(A+B)\Rightarrow x\in[x]_{R_I}\subseteq A+B\Rightarrow\exists y\in A,\exists z\in B,x=y+z\Rightarrow[x]_{R_I}=[y+z]_{R_I}=[y]_{R_I}+[z]_{R_I}\subseteq A+B$. 假设 $\exists y'\in[y]_{R_I},y\notin A$,又 $z\in[z]_{R_I},z\in B$,知 $y'+z\in[y]_{R_I}+[z]_{R_I},y'+z\notin A+B$,与 $[y]_{R_I}+[z]_{R_I}\subseteq A+B$ 矛盾. 故 $[y]_{R_I}\subseteq A$,同理 $[z]_{R_I}\subseteq B$,故 $x=y+z\in\underline{R_I}(A)+\underline{R_I}(B)$,从而

$$\underline{R_I}(A+B)\subseteq R_1(A)+\underline{R_I}(B).$$

反之,$\forall x\in\underline{R_I}(A)+\underline{R_I}(B)\Rightarrow\exists y\in\underline{R_I}(A),\exists z\in\underline{R_I}(B),x=y+z\Rightarrow[x]_{R_I}$

$= [y+z]_{R_I} = [y]_{R_I} + [z]_{R_I} \subseteq A + B \Rightarrow x \in \underline{R_I}(A+B)$.

综上所述知$\underline{R_I}(A+B) = \underline{R_I}(A) + \underline{R_I}(B)$.

(2) $\forall x \in \overline{R_I}(A+B) \Rightarrow [x]_{R_I} \cap (A+B) \neq \emptyset \Rightarrow \exists x' \in A+B, x-x' \in I \Rightarrow x \in I + x' \subseteq I + A + B = (A+I) + (B+I) \Rightarrow \exists y \in A+I, \exists z \in B+I, x = y+z \Rightarrow \exists y' \in A, y-y' \in I, \exists z' \in B, z-z' \in I, x = y+z \Rightarrow [y]_{R_I} \cap A \neq \emptyset, [z]_{R_I} \cap B \neq \emptyset, x = y+z \Rightarrow x = y+z \in \overline{R_I}(A) + \overline{R_I}(B)$,故$\overline{R_I}(A+B) \subseteq \overline{R_I}(A) + \overline{R_I}(B)$.

反之,$\forall x \in \overline{R_I}(A) + \overline{R_I}(B) \Rightarrow \exists y \in \overline{R_I}(A), \exists z \in \overline{R_I}(B), x = y+z \Rightarrow [y]_{R_I} \cap A \neq \emptyset, [z]_{R_I} \cap B \neq \emptyset, x = y+z \Rightarrow \exists y' \in A, y-y' \in I, \exists z' \in B, z-z' \in I, x = y+z \Rightarrow y-y'+z-z' \in I+I = I, y'+z' \in A+B, x = y+z \Rightarrow y'+z' \in [x]_{R_I} \cap (A+B) \Rightarrow x \in \overline{R_I}(A+B)$.

综上知$\overline{R_I}(A+B) = \overline{R_I}(A) + \overline{R_I}(B)$.

性质 6.2.8 设A,B是环X的任意子集,I是环X的理想,则

(1)
$$\underline{R_I}(AB) = \underline{R_I}(A)\,\underline{R_I}(B) \tag{6.17}$$

(2)
$$\overline{R_I}(AB) = \overline{R_I}(A)\,\overline{R_I}(B) \tag{6.18}$$

证明 (1) $\forall x \in \underline{R_I}(AB) \Rightarrow x \in [x]_{R_I} \subseteq AB \Rightarrow \exists y \in A, \exists z \in B, x = yz \Rightarrow [x]_{R_I} = [yz]_{R_I} = [y]_{R_I}[z]_{R_I} \subseteq AB$,假设 $\exists y' \in [y]_{R_I}, y' \notin A$,又$z \in [z]_{R_I}$, $z \in B$,故$y'z \in [y]_{R_I}[z]_{R_I} \subseteq AB, y'z \notin AB$,矛盾,故$[y]_{R_I} \subseteq A$,同理 $[z]_{R_I} \subseteq B \Rightarrow x = yz \in \underline{R_I}(A)\,\underline{R_I}(B) \Rightarrow \underline{R_I}(AB) \subseteq \underline{R_I}(A)\,\underline{R_I}(B)$.

反之,$\forall x \in \underline{R_I}(A)\,\underline{R_I}(B) \Rightarrow \exists y \in \underline{R_I}(A), \exists z \in \underline{R_I}(B), x = yz \Rightarrow [x]_{R_I} = [yz]_{R_I} = [y]_{R_I}[z]_{R_I} \subseteq AB \Rightarrow x \in \underline{R_I}(AB)$,综上所述知$\underline{R_I}(AB) = \underline{R_I}(A)\,\underline{R_I}(B)$.

(2) $\forall x \in \overline{R_I}(AB) \Rightarrow \exists x' \in [x]_{R_I} \cap AB \Rightarrow \exists y' \in A, \exists z' \in B, x' = y'z', x - y'z' \in I \Rightarrow x \in I + y'z' \subseteq I + AB = (A+I)(B+I) \Rightarrow \exists y \in A+I, \exists z \in B+I, x = yz \Rightarrow \exists y'' \in A, y-y'' \in I, \exists z'' \in B, z-z'' \in I, x = yz \Rightarrow [y]_{R_I} \cap A \neq \emptyset, [z]_{R_I} \cap A \neq \emptyset, x = yz \Rightarrow x = yz \in \overline{R_I}(A)\,\overline{R_I}(B)$.

反之,$\forall x \in \overline{R_I}(A)\,\overline{R_I}(B), \exists y \in \overline{R_I}(A), \exists z \in \overline{R_I}(B), x = yz. \Rightarrow \exists y' \in [y]_{R_I} \cap A, \exists z' \in [z]_{R_I} \cap B, x = yz \Rightarrow y'z' \in [y]_{R_I}[z]_{R_I} = [yz]_{R_I}, y'z' \in AB \Rightarrow y'z' \in [yz]_{R_I} \cap AB \Rightarrow x = yz \in \overline{R_I}(AB)$,综上知$\overline{R_I}(AB) = \overline{R_I}(A)\,\overline{R_I}(B)$.

§6.3 环中的粗素理想与模糊粗素理想

定义 6.3.1 设R_I是由环X的理想I决定的完备同余关系,A是X的非空子集,若$\underline{R_I}(A)$($\overline{R_I}(A)$)是X的素理想,称A是X的下(上)粗素理想;当A既是X的

下粗素理想又是 X 的上粗素理想时,称 A 为 X 的粗素理想.

由 §5.3 中的结论,我们很容易地可以得到以下结论.

定理6.3.1　设 R_I 是由环 X 的理想 I 决定的完备同余关系,A 是 X 的素理想,则 $\underline{R_I}(A)$,$\overline{R_I}(A)$ 均是 X 的素理想,即 A 为 X 的粗素理想.

推论6.3.1　设 R_I 是由环 X 的理想 I 决定的完备同余关系,A 是 X 的素理想,则 $\underline{R_I}(A)/I$,$\overline{R_I}(A)/I$ 均是 X/I 的素理想.

可以把环中的粗素理想的定义推广到环中的模糊粗素理想中.

定义6.3.2　设 R_I 是交换环 X 中给定理想 I 所决定的完备同余关系,A 是 X 的模糊子集,$\forall x,y\in X$,若 $\underline{R_I}(A)(xy)=\underline{R_I}(A)(x)$ 或 $\underline{R_I}(A)(y)$,称 A 是 X 的模糊下粗素理想;若 $\overline{R_I}(A)(xy)=\overline{R_I}(A)(x)$ 或 $\overline{R_I}(A)(y)$,称 A 是 X 的模糊上粗素理想;两者同时满足时,称 A 是 X 的模糊粗素理想.

定理6.3.2　设 R_I 是交换环 X 中给定理想 I 所决定的完备同余关系,若 A 是 X 的模糊素理想,则 A 是 X 的模糊粗素理想.

证明　由于 A 是 X 的模糊素理想,则 A_λ,A_λ 是 X 的素理想,由定理6.3.1可得 $\underline{R_I}(A_\lambda)$,$\overline{R_I}(A_\lambda)$ 是 X 的素理想,再由引理4.2.1知 $(\underline{R_I}(A))_\lambda$,$(\overline{R_I}(A))_\lambda$ 是 X 的素理想,故 $\underline{R_I}(A)$,$\overline{R_I}(A)$ 是 X 的模糊素理想,即 A 是 X 的模糊粗素理想.

定理6.3.3　设 R_I 是交换环 X 中给定理想 I 所决定的完备同余关系,A 是 X 的模糊子集,则(1)A 是 X 的模糊下粗素理想 $\Leftrightarrow\forall\lambda\in[0,1]$,$A_\lambda$ 是 X 的下粗素理想;(2)A 是 X 的模糊上粗素理想 $\Leftrightarrow\forall\lambda\in[0,1]$,$A_\lambda$ 是 X 的上粗素理想.

证明　(1)由引理4.2.1 $\underline{R_I}(A_\lambda)=(\underline{R_I}(A))_\lambda$,故 $\underline{R_I}(A)$ 是 X 的模糊素理想 $\Leftrightarrow(\underline{R_I}(A))_\lambda$ 是 X 的素理想 $\Leftrightarrow\underline{R_I}(A_\lambda)$ 是 X 的素理想.

(2)同理可证.

显然由定理6.3.3可得下述推论.

推论6.3.2　设 R_I 是交换环 X 中给定理想 I 所决定的完备同余关系.

(1)若 A 是 X 的模糊粗素理想,则 X_A 是 X 的粗素理想;

(2)若 A 是 X 的模糊上粗素理想,则 supp$A$ 是 X 的上粗素理想.

其中 $X_A=\{x\in X\mid A(x)=A(0)\}$,Supp$A=\{x\in X\mid A(x)>0\}$.

定理6.3.4　设 $f:X_1\to X_2$ 是交换环的满同态,R_I 是由 X_1 的理想 I 决定的完备同余关系,A 是 X_1 的子集且 $\ker f\subseteq I\subseteq A$,则:

(1)A 是 X_1 的上粗素理想 $\Leftrightarrow f(A)$ 是 X_2 的上粗素理想;

(2)当 f 是单射时,A 是 X_1 的下粗素理想 $\Leftrightarrow f(A)$ 是 X_2 的下粗素理想.

证明　(1)(必要性)由 $\overline{R_I}(A)$ 是 X_1 的素理想,则 $f(\overline{R_I}(A))$ 是 X_2 的素理想,

又由定理 6.1.2 知 $f(\overline{R_I}(A)) = \overline{R_{f(I)}}(f(A))$，故 $f(A)$ 是 X_2 的上粗素理想.

（充分性）由环的第二同构定理知，$\overline{R_I}(A)$ 是 X_1 的理想.

$\forall x_1, x_2 \in X_1, x_1x_2 \in \overline{R_I}(A) \Rightarrow [x_1x_2]_{R_I} \cap A \neq \emptyset$，由引理 6.1.1 得 $[f(x_1x_2)]_{R_{f(I)}} \cap f(A) = f([x_1x_2]_R) \cap f(A) \supseteq f([x_1x_2]_R \cap A) \neq \emptyset \Rightarrow f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2) \in \overline{R_{f(I)}}(f(A)) = f(\overline{R_I}(A))$，$\overline{R_{f(I)}}(f(A))$ 是素理想知 $f(x_1) \in f(\overline{R_I}(A))$ 或 $f(x_2) \in f(\overline{R_I}(A))$.

当 $f(x_1) \in f(\overline{R_I}(A))$ 时，$\exists x_1' \in \overline{R_1}(A)$，$f(x_1) = f(x_1') \Rightarrow f(x_1) - f(x_1') = f(x_1 - x_1') = 0 \Rightarrow x_1 - x_1' \in \ker f \subseteq I \Rightarrow x_1' \in [x_1]_{R_I}$，又 $x_1' \in \overline{R_I}(A)$，有 $[x_1']_{R_I} \cap A \neq \emptyset$，即 $[x_1]_{R_I} \cap A \neq \emptyset$，故 $x_1 \in \overline{R_I}(A)$. 同理当 $f(x_2) \in f(\overline{R_I}(A))$ 时，可得 $x_2 \in \overline{R_I}(A)$，所以 $\overline{R_I}(A)$ 是 X_1 的素理想.

(2)（必要性）$\forall x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0$，$\forall x' \in [x]_{R_I} \Rightarrow x' - x \in I \subseteq A \Rightarrow f(x' - x) = f(x') - f(x) = f(x') \in f(I) \subseteq f(A)$，$f$ 是单射可得 $x' \in A$，故 $[x]_{R_I} \subseteq A$，即 $x \in \underline{R_I}(A)$，得 $\ker f \subseteq \underline{R_I}(A)$. 所以 $f(\underline{R_I}(A))$ 是 X_2 的素理想.

由引理 6.1.2，从而可得 $f(A)$ 是 X_2 的下粗素理想.

（充分性）由环的第二同构定理知 $\underline{R_I}(A)$ 是 X_1 的理想.

$\forall x_1, x_2 \in X_1, x_1x_2 \in \underline{R_I}(A) \Rightarrow [x_1x_2]_{R_I} \subseteq A \Rightarrow f([x_1x_2]_{R_I}) = [f(x_1x_2)]_{R_{f(I)}} \subseteq f(A) \Rightarrow f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2) \in \underline{R_{f(I)}}(f(A))$，$f(A)$ 是 X_2 的下粗素理想及由引理 6.1.2 可得 $f(x_1) \in \underline{R_{f(I)}}(f(A)) = f(\underline{R_1}(A))$ 或 $f(x_2) \in \underline{R_{f(I)}}(f(A)) = f(\underline{R_I}(A))$，由 f 是单射可得 $x_1 \in \underline{R_I}(A)$ 或 $x_2 \in \underline{R_I}(A)$，故 $\underline{R_I}(A)$ 是 X_1 的素理想.

推论 6.3.3 设 $f: X_1 \to X_2$ 是交换环的满同态，R_I 是由 X_1 的理想 I 决定的完备同余关系，A 是 X_1 的子集且 $\ker f \subseteq I \subseteq A$，则

(1) $\overline{R_I}(A)/I$ 是 X_1/I 的素理想 $\Leftrightarrow \overline{R_{f(I)}}(f(A))/f(I)$ 是 $X_2/f(I)$ 的素理想；

(2) 当 f 是单射时，$\underline{R_I}(A)/I$ 是 X_1/I 的素理想 $\Leftrightarrow \underline{R_{f(I)}}(f(A))/f(I)$ 是 $X_2/f(I)$ 的素理想.

证明 由定理 6.3.4 知显然成立.

定理 6.3.5 设 $f: X_1 \to X_2$ 是交换环的满同态，R_I 是 X_1 中给定理想 I 所决定的完备同余关系且 $\ker f \subseteq I$，则：

(1) 若 B 是 X_2 的模糊粗理想，则 $f^{-1}(B)$ 是 X_1 的模糊粗理想；

(2) 若 B 是 X_2 的模糊粗素理想，则 $f^{-1}(B)$ 是 X_1 的模糊粗素理想.

证明 (1) $\forall x, y \in X_1$，$\overline{R_I}(f^{-1}(B))(xy) = \bigvee_{x'y' \in [xy]_{R_I}} f^{-1}(B)(x'y')$

$= \bigvee_{x'y' \in [xy]_{R_I}} B(f(x'y')) = \bigvee_{f(x')f(y') \in [f(x)f(y)]_{R_{f(I)}}} B(f(x')f(y'))$

$= \overline{R_{f(I)}}(B)(f(x)f(y))$，

由 B 是 X_2 的模糊粗理想及引理 6.1.1 可得 $\overline{R_I}(f^{-1}(B))(xy) \geqslant \overline{R_{f(I)}}(B)(f(x)) = \overline{R_I}(f^{-1}(B))(x)$ 且 $\overline{R_I}(f^{-1}(B))(xy) \geqslant \overline{R_I}(f^{-1}(B))(y)$.

同理 $\underline{R_I}(f^{-1}(B))(xy) \geqslant \underline{R_I}(f^{-1}(B))(x)$ 且 $\underline{R_I}(f^{-1}(B))(xy) \geqslant \underline{R_I}(f^{-1}(B))(y)$，故 $f^{-1}(B)$ 是 X_1 的模糊粗理想.

(2) 由上面证明过程易知 B 是 X_2 的模糊粗素理想时，$f^{-1}(B)$ 是 X_1 的模糊粗素理想.

定理 6.3.6　设 $f:X_1 \to X_2$ 是交换环的满同态，R_I 是 X_1 中给定理想 I 所决定的完备同余关系且 $\ker f \subseteq I$，则：

(1) 若 A 是 X_1 的模糊上粗理想，则 $f(A)$ 是 X_2 的模糊上粗理想；

(2) 若 A 是 X_1 的模糊上粗素理想，则 $f(A)$ 是 X_2 的模糊上粗素理想.

证明　(1) $\forall x,y \in X_2$, $\exists x_0,y_0 \in X$, $f(x_0) = x$, $f(y_0) = y$,

$\forall x'y' \in [xy]_{R_{f(I)}}$, $\exists x_0',y_0'$, $f(x_0') = x'$, $f(y_0') = y'$. 由上近似定义、扩张原理及引理 6.1.1 可得，

$$\begin{aligned}
&\overline{R_{f(I)}}(f(A))(xy) \\
&= \bigvee_{x'y' \in [xy]_{R_{f(I)}}} f(A)(x'y') \\
&= \bigvee_{x'y' \in [xy]_{R_{f(I)}}} \left(\bigvee_{f(z) = f(x_0')f(y_0')} A(z) \right) \\
&= \bigvee_{x'y' = f(x_0'y_0')} \left(\bigvee_{x_0'y_0' \in [x_0y_0]_{R_I}} A(x_0'y_0') \right) \\
&= \bigvee_{x'y' = f(x_0'y_0')} (\overline{R_I}A(x_0y_0)).
\end{aligned}$$

由 A 是 X_1 的模糊上粗理想，则 $\overline{R_{f(I)}}(f(A))(xy) \geqslant \bigvee_{x' = f(x_0')} (\overline{R_I}A(x_0)) = \overline{R_{f(I)}}(f(A)(x)$ 且 $\overline{R_{f(I)}}(f(A))(xy) \geqslant \bigvee_{y' = f(y_0')} (\overline{R_I}A(y_0)) = \overline{R_{f(I)}}(f(A)(y))$，故 $f(A)$ 是 X_2 的模糊上粗理想.

(2) 由上述证明过程易知若 A 是 X_1 的模糊上粗素理想，则 $f(A)$ 是 X_2 的模糊上粗素理想.

§6.4　环中的粗极大理想与模糊粗极大理想

定义 6.4.1　设 A 是环 X 的模糊理想，若 $\mathrm{Supp}A$ 是 X 的极大理想，则称 A 是 X 的模糊极大理想.（其中 $\mathrm{Supp}A = \{x \in X \mid A(x) > 0\}$）

由粗糙集的性质$\underline{R_I}(A) \subseteq A \subseteq \overline{R_I}(A)$知，若$\underline{R_I}(A)$是极大理想，则$A,\overline{R_I}(A)$一定是极大理想；但$\overline{R_I}(A)$是极大理想时，$\underline{R_I}(A)$，$A$不一定是极大理想. 故定义粗极大理想如下.

定义6.4.2 设R_I是由环X的理想I决定的完备同余关系，A是X的非空子集，$\overline{R_I}(A)$是X的极大理想，称A是X的粗极大理想.

由粗糙集的性质有下述的结论.

定理6.4.1 设R_I是由环X的理想I决定的完备同余关系，A,B是X的理想.

(1) 若A是X的粗极大理想且$A \subseteq B$，则B是X的粗极大理想；

(2) 若$A \cap B$是X的粗极大理想，则A,B的上粗理想的交是X的粗极大理想；

(3) 若AB是X的粗极大理想，则$A,B,A \cap B$均是X的粗极大理想.

证明 已知A,B是X的理想，则A,B是X的上粗理想.

(1) 由$A \subseteq B$可得$\overline{R_I}(A) \subseteq \overline{R_I}(B)$，又$A$是$X$的粗极大理想，故$\overline{R_I}(A) = \overline{R_I}(B)$，所以$B$是$X$的粗极大理想.

(2) 已知$\overline{R_I}(A \cap B) \subseteq \overline{R_1}(A) \cap \overline{R_I}(B)$，由理想的性质知$\overline{R_I}(A) \cap \overline{R_I}(B)$是理想，由$A \cap B$是$X$的粗极大理想，可得$\overline{R_I}(A \cap B) = \overline{R_I}(A) \cap \overline{R_I}(B)$，故$A,B$的上粗理想的交是粗极大理想.

(3) 由A,B是X的理想，则$AB \subseteq A, AB \subseteq B, AB \subseteq A \cap B$，故$\overline{R_I}(AB) \subseteq \overline{R_I}(A)$，$\overline{R_I}(AB) \subseteq \overline{R_I}(B)$，$\overline{R_I}(AB) \subseteq \overline{R_I}(A \cap B)$，由理想性质知$A,B,A \cap B$都是上粗理想，又由$AB$是$X$的粗极大理想，可得$A,B,A \cap B$都是粗极大理想.

环中的粗极大理想的定义很容易推广到环中的模糊粗极大理想.

定义6.4.3 设R_I是由环X的理想I决定的完备同余关系，A是X的模糊子集，若$\overline{R_I}(A)$是X的模糊极大理想，则称A是X的模糊粗极大理想中.

定理6.4.2 设R_I是由环X的理想I决定的完备同余关系，若A是X的模糊极大理想，则A是X的模糊粗极大理想.

证明 A是X的模糊理想，$\overline{R_I}(A)$是X的模糊理想，又$\overline{R_I}(A) \supseteq A$，故$\mathrm{Supp}(\overline{R_I}(A)) \supseteq \mathrm{Supp}(A)$，由$A$是模糊极大理想知$\mathrm{Supp}A$是$X$的极大理想，故$\mathrm{Supp}(\overline{R_I}(A))$是模糊极大理想，即$\overline{R_I}(A)$是$X$的模糊极大理想.

引理6.4.1 设A,B是环X的模糊子集，$\forall \lambda \in [0,1]$，则：

(1)$A_\lambda B_\lambda = (AB)_\lambda$；

(2)$A_\lambda + B_\lambda = (A+B)_\lambda$.

特殊地有$\mathrm{Supp}A\mathrm{Supp}B = \mathrm{Supp}(AB)$；$\mathrm{Supp}A + \mathrm{Supp}B = \mathrm{Supp}(A+B)$.

证明　(1) $\forall x \in A_\lambda B_\lambda \Leftrightarrow \exists y \in A_\lambda, A(y) > \lambda, \exists z \in B_\lambda, B(z) > \lambda, x = yz \Leftrightarrow AB(x) = \bigvee_{x=yz}((A)(y) \wedge B(z)) > \lambda \Leftrightarrow x \in (AB)_\lambda$.

(2) 同理可证.

由引理 4.2.1 知，设 R_I 是由环 X 的理想 I 决定的完备同余关系，A 是 X 的模糊子集，则 $(\overline{R_I}(A))_\lambda = \overline{R_I}(A_\lambda)$，特殊地有 $\mathrm{Supp}(\overline{R_I}(A)) = \overline{R_I}(\mathrm{Supp}A)$.

定理 6.4.3　设 R_I 是由环 X 的理想 I 决定的完备同余关系，A 是环 X 的模糊理想，若 $A_\lambda(\lambda \in [0,1])$ 是 X 的粗极大理想，则 A 是 X 的模糊粗极大理想.

证明　显然 $A_\lambda \subseteq \mathrm{Supp}A$，由粗糙集的性质，有 $\overline{R_I}(A_\lambda) \subseteq \overline{R_I}(\mathrm{Supp}A) = \mathrm{Supp}(\overline{R_I}(A))$，显然 $\mathrm{Supp}(\overline{R_I}(A))$ 是理想，又 A_λ 是粗极大理想，故 $\overline{R_I}(A_\lambda) = \mathrm{Supp}(\overline{R_I}(A))$，即 A 是 X 的模糊粗极大理想.

显然定理 6.4.1 可以推广到模糊集.

定理 6.4.4　设 R_I 是由环 X 的理想 I 决定的完备同余关系，A,B 是 X 的模糊理想.

(1) 若 A 是 X 的模糊粗极大理想且 $A \subseteq B$，则 B 是 X 的模糊粗极大理想.

(2) 若 $A \cap B$ 是 X 的模糊粗极大理想，则 A,B 的模糊上粗理想的交是 X 的模糊粗极大理想.

(3) 若 AB 是 X 的模糊粗极大理想，则 $A,B,A \cap B$ 均是 X 的模糊粗极大理想.

证明　(1)、(2) 显然成立.

(3) 由 A,B 是 X 的模糊理想可得 $\mathrm{Supp}A, \mathrm{Supp}B$ 是 X 的理想，

故 $\mathrm{Supp}A\mathrm{Supp}B \subseteq \mathrm{Supp}A$，由引理 6.4.1 有 $\mathrm{Supp}(AB) \subseteq \mathrm{Supp}A$，

从而 $\overline{R_I}(\mathrm{Supp}(AB)) \subseteq \overline{R_I}(\mathrm{Supp}A)$，由此，$\mathrm{Supp}(\overline{R_I}(AB)) \subseteq \mathrm{Supp}(\overline{R_I}(A))$，从而可得 A 是 X 的模糊粗极大理想.

同理可得 $B, A \cap B$ 是 X 的模糊粗极大理想.

下面讨论同态问题.

定理 6.4.5　设 f 是环 X 到环 Y 的一个满同态，R_I 是由 X 的理想 I 决定的完备同余关系，且 $\ker f \subseteq I$，A 是 X 的子集且 $\ker f \subseteq \overline{R_I}(A)$，则 A 是 X 的粗极大理想 $\Leftrightarrow f(A)$ 是 Y 的粗极大理想.

证明　(必要性) 由环的第二同构定理，若 A 是 X 的粗理想，则 $f(A)$ 是 Y 的粗理想. 假设存在 Y 的真理想 $f(B) \supset f(\overline{R_I}(A)) = \overline{R_I}(f(A))$，则理想 $B \supset \overline{R_I}(A)$，与 A 是粗极大理想矛盾，故 $f(A)$ 是 Y 的粗极大理想.

(充分性) 类似上面的方法，显然反之也成立.

引理 6.4.2　设 f 是环 X 到环 Y 的一个满同态，A 是 X 的模糊子集，则 $f(A_\lambda) = (f(A))_\lambda$，特殊地有 $f(\mathrm{Supp}A) = \mathrm{Supp}(f(A))$.

证明 $\forall y \in f(A_\lambda) \Leftrightarrow \exists x \in A_\lambda, A(x) > \lambda, f(x) = y \Leftrightarrow f(A)(y) = \bigvee_{f(x)=y} A(x) > \lambda \Leftrightarrow y \in (f(A))_\lambda$，故 $f(A_\lambda) = (f(A))_\lambda$.

定理 6.4.6 设 f 是环 X 到环 Y 的一个满同态，R_I 是由 X 的理想 I 决定的完备同余关系，且 $\ker f \subseteq I$，A 是 X 的模糊子集且 $\ker f \subseteq \mathrm{Supp}(\overline{R_I}(A))$，则 A 是 X 的模糊粗极大理想 $\Leftrightarrow f(A)$ 是 Y 的模糊粗极大理想.

证明 （必要性）由 $\overline{R_I}(A)$ 是 X 的模糊理想，则 $f(\overline{R_I}(A)) = \overline{R_{f(I)}}(f(A))$ 是 Y 的模糊理想. 假设存在 Y 的模糊理想 $f(B)$，$\mathrm{Supp} f(B) \supseteq \mathrm{Supp}(\overline{R_I}(f(A)))$，由引理 6.4.2，则 $f(\mathrm{Supp} B) \supset f(\mathrm{Supp}(\overline{R_I}(A)))$，由环的第二同构定理，$\mathrm{Supp} B \supset \mathrm{Supp}(\overline{R_I}(A))$，与 A 是 X 的模糊粗极大理想矛盾，故与 $f(A)$ 是 Y 的模糊粗极大理想矛盾.

（充分性）类似上面证法，显然，反之也成立.

参考文献

[1] 张文修,王国俊,刘金旺等. 模糊数学引论[M]. 西安:西安交通大学出版社,1991

[2] 罗承忠. 模糊集引论[M]. 北京:北京师范大学出版社,1991

[3] 汪培庄,李洪兴. 模糊系统理论与模糊计算机[M]. 北京:科学出版社,1996

[4] 汪培庄. 模糊集与随机集落影[M]. 北京:北京师范大学出版社,1985

[5] 马骥良,于纯海. 模糊代数选论 [M]. 北京: 文苑出版社,1989

[6] Hong Xing Li and Vincent C. Yen,Fuzzy Sets and Fuzzy Decision-Making[M], CRCPress,FL,USA,1995

[7] Terano T.,Asai K. and Sugeno M., Fuzzy Systems Theory and its Applicat ions [M],Academic Press,New York,1992

[8] Dubois D., Prade H., Fuzzy Sets and Systems: Theory and its Applications [M],Academic Press,New York,1980

[9] Kanfmann, A. Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets[M], Vol. 1, New York,1975

[10] H. J. Zimmermann, Fuzzy Sets Theory and its Applications[M], Kluwer Nijhoff Publishing,1984

[11] 汪培庄. 模糊集合论与应用[M]. 上海:上海科技出版社,1982

[12] T. W. Hungerford. (冯克勤译). 代数学[M]. 长沙:湖南教育出版社,1990

[13] 胡长流,宋振明. 格论基础[M]. 郑州:河南大学出版社,1990

[14] L. A. Zadeh,Fuzzy sets as a Basis for a Theory of Possibility[J],Fuzzy Sets and Systems ,1978,1:3 ~ 28

[15] L. A. Zadeh,Fuzzy sets[J],Information Control,1965,8:338 ~ 353

[16] L. A. Zadeh,Probability Measure of Fuzzy Events [J],J. Math. Anal. Appl., 1968,23:421 ~ 427

[17] 钟育彬. 幂群的结构及相互关系[J],. 数学季刊.,1990,4:73 ~ 77

[18] 钟育彬. 构造 HX 环的条件和方法[J]. 广州师范学校,1999,7:1 ~ 6

[19] 翟建仁等. 一般扩张原理. 模糊系统与数学. 1995,1:16~21
[20] 史福贵. L-Fuzzy Mapping of L-Fuzzy Sets[J]. 模糊系统与数学,2000,3:16~24
[21] 马学文,罗从文. Fuzzy 集的分解定理[J]. 模糊系统与数学. 2001,1:17~20
[22] 马学文,罗从文. Fuzzy 集的表现定理[J]. 模糊系统与数学. 2001,2:68~70
[23] 马骥良,于纯海. Fuzzy 群,东北师范大学学报[J]. 1981,3:21~25
[24] 马骥良,于纯海. Fuzzy 环,东北师范大学学报[J]. 1982,1:23~28
[25] 吴望名. Fuzzy 正规子群[J]. 模糊数学. 1981,1:21~31
[26] 戚振开. 点态化的模糊群[J]. 模糊数学. 1981,2:28~36
[27] 卢蓁,罗承忠. L-Fuzzy 群的同态与同构及其性质[J]. 模糊系统与数学. 1995,1:33~37
[28] 李素云,路跃华,谷文祥. 模糊群的若干性质[J]. 模糊系统与数学. 1995,1: 37~41
[29] 姚炳学. 群的模糊同态与模糊商群的同构定理[J]. 模糊系统与数学. 2001,3:5~9
[30] L. Filap, Structure and Construction of Fuzzy Subgroup[J], Fss. 1992, 51:105-110
[31] Shi. F. G, L-Fuzzy Relations and L-Fuzzy Subgroup[J], Journal of Fuzzy Mathematics ,2000,2:491~499
[32] 张俊芳. L-Fuzzy 子群与 L-Fuzzy 群同态[J]. 模糊系统与数学. 2003,3:61~67
[33] 李洪兴,汪培庄. 幂群[J]. 应用数学. 1998,1:1~4
[34] 李洪兴. 正则 HX 群的同态与同构[J]. 模糊系统与数学. 1990,1:1~7
[35] 李洪兴. HX 环[J]. 数学季刊. 1991,1:17~21
[36] 罗承忠,米洪海. Fuzzy 幂群[J]. 模糊系统与数学. 1994,1:1~9
[37] Zhen-liang Zhang, The Properties of HX Groups [J], Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 1997, 1:97~106
[38] Zhen-liang Zhang, Clissifications of HX Groups and Their Chains of Normal Subgroups [J], Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 1999, 5:125~134
[39] Zhen-liang Zhang, Structures and Clissifications of HX Rings[J], Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2002, 12:9~20

[40] 张振良,李洪兴,汪培庄. 正规超群与商群的关系[J]. 数学季刊. 1987,3:43 ~ 45
[41] 张振良. 幂群的结构与分类[J]. 纯粹数学与应用数学. 1998,1:36 ~ 41
[42] 张振良. 正规幂环与一致幂环[J]. 纯粹数学与应用数学. 2001,1:6 ~ 13
[43] 张振良. 各种幂群的结构与同态同构关系[J]. 昆明理工大学学报. 1998,2:92 ~ 99
[44] 张振良. 幂环的性质与结构[J]. 模糊集理论与应用(会议文集),1998
[45] 杨培亮,张振良. 模糊幂群的性质与结构[J]. 纯粹数学与应用数学,2002,3:282 ~ 287
[46] 杨培亮,张振良. F 幂群的分类[J]. 模糊系统与数学. 2003,1:53 ~ 57
[47] 张晓莉,张振良. F 幂环[J]. 模糊系统与数学. 2004,1:31 ~ 35
[48] 张振良. 集合套与集值统计[J]. 昆明理工大学学报. 1989,1:34 ~ 38
[49] 张振良. 逆序集值映射的落影[J]. 昆明理工大学学报. 1990,2:61 ~ 65
[50] 张振良. 集合套的落影分布函数[J]. 模糊系统与数学. 1990,2:38 ~ 44
[51] Zhen-liang Zhang, Antitonic Set-Valued Mappings and Fuzzy Sets[J], First Asian Fuzzy System Symposium,1993,23 ~ 26
[52] Zhen-liang Zhang, Distribution Function of Falling Shadow of Random Sets and Fuzzy Sets [J],Workshopon Knowledge-Based Systems and Models of Logical Reasoning,1988,13 ~ 19
[53] Zhen-liang Zhang,Subgroups and Invariant Subgroups of Normal Hypergroups [J],BUSEFAL,1986,15 ~ 28
[54] Zhen-liang Zhang, Eguivalent Conditions Under Which The Normal Hypergroups are Quotient Groups[J],BUSEFAL,1987,31:3 ~ 7
[55] Zhen-liang Zhang, Relationship BetweenNormal Hypergroups and Quotient Groups[J],BUSEFAL,1986,27,25 ~ 28
[56] 杨文泽. 以群的非空子集为元素的群[J]. 西南师范大学学报,1985,2
[57] 杨文泽. 幂群与它的生成群[J]. 数学的实践与认识. 1998,4
[58] 杨培亮. F 幂群的同态与同构[J]. 昆明理工大学学报. 2001,2
[59] 李扉,张振良. 点态化的模糊幂群[J]. 模糊系统与数学(专辑). 2004,94 ~ 97
[60] 高井贵,张振良. AHX 群[J]. 昆明理工大学学报 28(增刊). 2003,473 ~ 476
[61] 刘文军. 幂环的一些性质[J]. 昆明理工大学学报. 2000,4:26 ~ 30
[62] 张金玲,张振良. 粗糙子群与粗糙子环[J]. 纯粹数学与应用数学. 2004,

20(1):92 ~ 96

[63] 张金玲,张振良．模糊粗糙子群[J]. 模糊系统与数学．2004,18(4):46 ~ 48

[64] 肖旗梅,张振良．环中的粗极大理想与模糊粗极大理想[J]. 昆明理工大学学报. 2005,1:23 ~ 26

[65] 郭海刚,高井贵,张振良．模糊相似关系下的模糊粗糙集[J]. 辽宁师范大学学报．2006,29(3):280 ~ 291

[66] 肖旗梅,张振良．环中关于理想同余的粗糙集的性质[J]. 纯粹数学与应用数学．2004,20(4):382 ~ 385

[67] 郭庆,张振良,张金玲．截集形式的模糊粗糙集及其性质[J]. 纯粹数学与应用数学. 2005,21(3):224 ~ 228

[68] 肖旗梅,张振良,张金玲. 环中的粗素理想与模糊粗素理想[J]. 模糊系统与数学．2005,3,19(1):116 ~ 120

[69] Qi-mei Xiao, Zhen-liang Zhang, rough prime ideals and rough fuzzy prime ideals in semigroups[J], Information Sciences, 2006, 176, 725-733

[70] Chakrabarty K, Biswas R and Nanda S. Fuzziness in rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 110: 247-251

[71] Beaubouef T, Petry F, Arora G., Information theoretic measures of uncertainty for rough sets and rough relational databases [J]. Information Sciences, 1998, 109: 185-195

[72] Yao Y Y., Two views of the theory of rough sets in finite universe [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1996, 15: 291-317

[73] Lin T Y., A rough logic formalism for fuzzy controllers: A hard and soft computing view [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1996, 15: 395-414

[74] Nakamura A., A rough logic based on incomplete information and its application [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1996, 15: 367-378

[75] Nakamura A., A rough logic based on incomplete information and its application [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1996, 15: 367-378

[76] Pawlak Z., et al., Rough sets [J]. Communication of the ACM, 1995, 38: 89-95

[77] Yao Y Y., A comparative study of fuzzy sets and rough sets [J]. Information Sciences, 1998, 109: 21-47

[78] Yao Y Y., A comparative study of fuzzy sets and rough sets[J]. Information

Sciences, 1998,109: 185-195

[79] Yao Y Y. , A comparative study of fuzzy sets and rough sets [J]. Information Sciences, 1998,109: 227-242

[80] KUROKI N. , Fuzzy congruences and fuzzy normal subgroups [J]. Information Sciences, 1992,60: 247-259

[81] Dubois D, Prade H. , Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets [J]. Int. J. General Systems, 1990, 17: 191-209

[82] Pawlak Z. , Rough sets [J]. Internation Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11:341-356

[83] Chmielewski M R, Grzymala-Busse J W. , Globaldiscretization ofcontinuous attributes as preprocessing for machine learning [J]. International Journal of Approximate Reasoning ,1996,15: 319-331

[84] Chan C C. , A Rough set approach to attibute generalization in data mining [J],Jourmal of Information Sciences,1998,107:169-176

[85] Mcsherry D. , Knowledge discovery byinspection[J]. Decision Support Systems,1997,21:43-47

[86] Pawlak Z. , Rough set approach to knowledge-based decision support [J]. European Journal of Operational Research,1997,99:48-57

[87] MOHUA BANERJEE. Roughness of a fuzzy set [J]. Information and Computer Science, 1996, 93: 235-246

[88] KUROKIN. Rough ideals in semigroups [J]. Information Science, 1997, 100:139-163

[89] Chan C C. , Kuchta D. , Further remarks on the relation between rough and fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 47:391-394

[90] Nanda S, Majumdar S. , Fuzzy rough sets. Fuzzy Sets and Systems [J]1992, 45:157-160

[91] 王珏，苗夺谦，周育健．关于 Rough sets 理论与应用的综述 [J]．模式识别与人工智能．1996, 9: 337 ~ 344

[92] 苗夺谦，王珏．粗糙集理论中概念与运算的信息表示 [J]．软件学报，1999,10: 113 ~ 116

[93] T. Iwinski. , Algebraic approach to rough sets [J]. Bull. Polish Acad. Math, 1987, 35: 673-683

[94] R. Biswas , S. Nanda. , Rough groups and rough subgroups [J]. Bull. Polish Acad. Math, 1994, 42: 251-254

[95] Jacobson N. 基础代数 [M]. 北京：高等教育出版社，1987

[96] Pawlak Z. Rough sets and fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1985, 17: 99-102

[97] 张文修，吴伟志等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京：科学出版社,2001

[98] 盛德成. 抽象代数 [M]. 北京：科学出版社，2001

[99] G. Gerla, L. Scarpati, Extention principles for fuzzy set theory[J], Information Scien-ces, 1998, 106: 49-69

[100] Zbigniew Bonikowski, Edward Bryniarski, Urszula Wybraniec-Skardowska, Extensions and intentions in the rough set theory, Journal of Information Sciences, 1998, 107: 149-167

[101] Chien-Chung Chan, A rough set approach to attribute generalization in data mining, Journal of Information Sciences, 1998, 107: 169-176

[102] Azriel Rosenfeld, Fuzzy geometry: An updated overview[J], Information Sciences, 1998, 110: 127-133

[103] L. A. Zadeh, Fuzzy sets[J], Information Control, 1965, 8: 338-353

[104] C. Zheng, Fuzzy path and fuzzy connectedness[J], Fuzzy Sets Systems, 1984, 14: 273-280

[105] M. Kryszkiewicz, Rough set approach to incomplete information systems[J], Information Sciences, 1998, 112: 39-49

[106] John Mordeson, William Newman, Fuzzy Integral Equations[J], Information Sciences, 1995, 87: 215-229

[107] Luo Chongshu, The theorems of decomposition and representation for fuzzy graphs[J], Fuzzy Sets and Systems, 1991, 42: 237-243

[108] Nobuyuki Nakajima, Generalized fuzzy sets[J], Fuzzy Sets and Systems, 1989, 32: 307-314

[109] Vesselin Dimiev, Fuzzifying functions[J], Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33: 47-58

[110] M. T. Lamata, S. Moral, Classification of fuzzy measures[J], Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33: 243-253

[111] M. K. Chakraborty, Mili DAS, Studies in fuzzy relations over fuzzy subsets[J], Fuzzy Sets and Systems, 1983, 9: 79-89

[112] QU Yinsheng, Measures of fuzzy sets[J], Fuzzy Sets and Systems, 1983, 9: 219-227

[113] E. P. Klement, W. Schwyhla, Correspondence between fuzzy measures and

classical measures[J],Fuzzy Sets and Systems,1982,7:57-70

[114] Eugene Rorenta,On the degree of fuzziness of a fuzzy set[J],Fuzzy Sets and Systems,1900,36:259-264

[115] Z. Pawlak,Rough Sets[J],International Journal of Computer and Information Science,1982,11:341-356

[116] Banerjee M,Pal. S. K,Roughness of a fuzzy set[J],Information Sciences,1996,93:235-246

[117] Z. Pawlak,Rough sets and fuzzy sets[J],Fuzzy Sets and Systems,1985,17:99-102

[118]S. Nanda,S. Majumdar,Fuzzy rough sets[J],Fuzzy Sets and Systems,1992,45:157-160

[119] 张文修,乐惠玲．扩张模糊算子与模糊真值可能度[J]．西安交通大学学报．1982,16(5):1～11

[120] 于剑,程乾生．模糊划分的一个新定义及其应用[J]．北京大学学报．36(5):619～623

[121] 袁学海,李洪兴,罗承忠. 几种新的截集及其应用[J]. 模糊系统与数学. 1997,11(1):37～43

[122] 王国俊．模糊命题演算的一种形式演绎系统[J]．科学通报．1997,42(10):1041～1045

[123] 刘文奇,吴从炘．相似关系粗集理论与相似关系信息系统[J]．模糊系统与数学．2002,16(3):10～18

[124] 王亚英,张春慨,邵惠鹤. 变论域知识约简算法[J]. 上海交通大学学报. 2002,36(4),566～569

[125] 石峰,娄臻亮,张永清等. 基于模糊-粗糙集模型的一种归纳学习方法[J]. 上海交通大学学报．2002,36(7):920～924

[126] 孙辉,刘大有,李文．粗集公理组的极小化[J]．计算机学报．2002,25(2):202～207

[127] 谷文祥. 格上三角模及其构造算法[J]. 东北师范大学学报(自然科学版). 2002,34(3):27～31

[128] 王珏,苗夺谦,周育健．关于 Rough Set 理论与应用的综述[J]．模式识别与人工智能．1996,9(4):337～344

[129] 李兵,吴孟达．粗糙集研究中的模糊集方法[J]．模糊系统与数学．2002,16(2):69～73

[130] 张梅,李怀祖,张文修．Fuzzy 信息系统的 Rough 集理论[J]．模糊系统与

数学. 2002,16(3):44~49

[131] 王玲芝. 粗糙模糊集的贴近度[J]. 四川师范大学学报(自然科学版). 2002, 25(5):476~478

[132] 程昳,莫智文. 模糊粗糙集及粗糙模糊集的模糊度[J]. 模糊系统与数学. 2001,15(3):15~18

[133] 程昳,莫智文. 模糊粗糙集的分解定理及表现定理[J]. 四川师范大学学报(自然科学版). 2001,24(2):111~113

[134] 刘贵龙. 模糊近似空间上的粗糙模糊集. 模糊系统与数学[J]. 2002,16: 75~78

[135] Xiao-yan Zhao, Zhen-liang Zhang, Rough set and roughness of fuzzy set on the fuzzy approximation space [J]. southeast Asian bulletin of Mathematics, 2005,29(3)617~625.

[136] Yun-qiang Yin, Xiao-kun Huang, Zhen-liang Zhang, The fuzzy prime ideals in fuzzy Semigroups based on fuzzy proits[J]. Southeast Asian bulletin of Mathematics, 2007,31(1),153~161.

[137] Fei Li, Yun-qiang Yin, Zhen-liang Zhang, The fuzzy paint power Ring[J]. Sou theast Asian bulletin of Mathematiss, 2007,31(2),275~283.

[138] Yun-qiang Yin, Fei Li, Zhen-liang Zhang, The pointwise fuzzy maximal ideal-sin fuzzy senrigroups[J]. Italian Journal of pure and Applied Mathematics, 2007,21,169~176.

[139] Wen-ze Yang, Zhen-liang Zhang, Fuzzy points and fuzzy power groups[J]. I-talian Journal of pure and Applied Mathematics, 2007,21,19~26.

[140] 张虹,张振良,Fuzzy 信息系统的原性约简[J],模糊系统与数学(专辑) 2004,262~265

[141] 黄春娥,张振良,基于截集的变精度模糊粗糙模型[J],模糊系统与数学,(专辑)2004

[142] 李扉,张振良,张金玲,关态化 Fuzzy 幂群的转移定理[J],模糊系统与数学,2006,No. i95~98

[143] 高井贵,郭海刚,郭庆,张振良,群中模糊同余关系下的模糊粗糙群[J],模糊系统与数学,2005,19(3),62~66

[144] 郭海刚,张振良,高井贵,相似关系下的模糊粗糙集模型[J],昆明理工大学学报,29(6),2004,153~155

[145] 刘新,张振良,赵晓燕,一种弱 BL 一代数及其滤子问题[J]昆明理工大学学报,28(增刊),2003,482~487

[146] 孔平,张振良,模糊粗糙集的扩张原理[J],昆明理工大学学报,2003,28(6),151~153

[147] 越晓燕,张振良,模糊T近似空间上粗糙模糊的等价定义[J],昆明理工大学学报,28(增刊),2003,491~493

[148] 张虹,张振良,模糊关系下粗糙集模型[J],昆明理工大学学报,29(增刊)2004,309~312

[149] 黄春娥,张振良,色含度下的变精度模糊粗糙集模型[J],昆明理工大学学报,29(增刊)2004,302~304

[150] 曾亦清,张振良,吴态化的Fuzzy左(右)理想[J],昆明理工大学学报,30(增刊)2005,327~329

[151] Yun-qiang Yin, Xiao-Kun Huang, zhen-Liang zhang, The properties And structures of fuzzy power monoid[J], Set-Valued Mathematics and Applications, 2007, 1(1), 15~20

[General Information]
书名=模糊代数与粗糙代数
作者=张振良　张金玲　肖施梅编著
页数=171
SS号=11868125
DX号=
出版日期=2007年08月第1版
出版社=武汉大学出版社